MAKTABGACHA VA MAKTAB TA'LIMI VAZIRLIGI

PEDAGOGIK MAHORAT VA XALQARO BAHOLASH ILMIY-AMALIY MARKAZI

Respublika Ta'lim Markazi

Методические рекомендации и материалы по проведению итоговой аттестации по предмету

«Математика»

(углублённый)

для учащихся 11-х классов общеобразовательных школ

в 2025–2026 учебном году.

ОБЯЗАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДМЕТ

СПЕЦИФИКАЦИЯ ТЕСТОВОГО ИСПЫТАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ ИЗ ГРУППЫ ОБЯЗАТЕЛЬНЫХ ПРЕДМЕТОВ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 11-Х КЛАССОВ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ШКОЛ НА 2025–2026 УЧЕБНЫЙ ГОД

Настоящая спецификация устанавливает требования к содержанию, охвату, типам, формам, критериям оценивания и порядку проведения тестовых заданий по математике, используемых при оценке знаний, умений, навыков и компетенций учащихся 11-х классов общеобразовательных школ.

I. Общие принципы

Цель оценивания — комплексная оценка знаний, умений, навыков и компетенций учащихся 11-х классов по математике на основе учебных целей, определённых действующими учебными программами. Для обеспечения обоснованности (валидности) решений, принимаемых по результатам итоговой государственной аттестации учащихся 11-х классов, при проведении оценивания соблюдаются принципы валидности, надёжности, справедливости и прозрачности.

II. Нормативные основания

1. Положение об итоговой государственной аттестации обучающихся общего среднего образования, утверждённое приказом Министра народного образования Республики Узбекистан от 4 марта 2008 года № 56 «Об утверждении Положения об итоговой государственной аттестации обучающихся общего среднего образования».
2. Действующая учебная программа по математике для 5–11-х классов.
3. Приказ Министра дошкольного и школьного образования Республики Узбекистан №102 от 16 марта 2026 года «Об организации и проведении итоговой государственной аттестации учащихся в общеобразовательных учреждениях в 2025–2026 учебном году»

III. Охват оценивания и отведённое время

В целях определения уровня знаний учащихся 11-х классов общеобразовательных школ по математике в рамках итоговой государственной аттестации предлагается **25 тестовых заданий**. На их выполнение отводится **180 минут**.

Распределение экзаменационных материалов по содержательным областям, а также по оцениваемым знаниям, умениям, навыкам и компетенциям представлено в следующих таблицах:

Содержательная область	**Конструкты**	**Количество тестов**
1. Алгебра		
1.1. Алгебра и функции	Умеет выносить общий множитель за скобки и разлагать алгебраические выражения на множители; умеет применять формулы сокращённого умножения для упрощения алгебраических выражений и вычислять их числовые значения при заданных значениях переменных Умеет составлять математическую модель задач на проценты, работу, движение и смеси и находить их решения; умеет решать более сложные и нестандартные задачи на уравнения и неравенства Знает определения и свойства арифметической и геометрической прогрессий и умеет распознавать арифметическую/геометрическую прогрессию среди других последовательностей; умеет задавать прогрессию как в рекуррентной форме, так и с помощью формулы Умеет различать графики элементарных функций по их свойствам, определять область определения и множество значений функции, устанавливать чётность или нечётность функции Умеет решать показательные уравнения и неравенства, используя свойства степеней, введение новой переменной и свойства показательной функции; умеет решать логарифмические уравнения и неравенства, используя свойства логарифмов и тождественные преобразования с учётом свойств логарифмической функции Умеет решать тригонометрические уравнения и неравенства, используя тригонометрические тождества, формулы и свойства тригонометрических функций Знает методы решения рациональных уравнений путём разложения на множители и введения новой переменной и умеет применять их; умеет выводить алгоритм решения рациональных неравенств; умеет решать простейшие системы рациональных неравенств; умеет выводить алгоритм решения иррациональных уравнений и применять его при решении задач	7
1.2. Основы математического анализа	Умеет находить производные суммы, разности, произведения и частного; умеет вычислять производные элементарных функций; умеет находить производные сложных функций; умеет вычислять	5

	производные простейших функций, заданных параметрически или в неявной форме Умеет полностью исследовать функцию с помощью производной (находить область определения, стационарные точки, промежутки возрастания и убывания, точки экстремума), анализирует и обосновывает полученные результаты и на их основе строит график функции Умеет применять правила дифференцирования, а также уравнения касательной и нормали к графику функции для решения задач геометрического, физического и экономического содержания Умеет вычислять определённый интеграл; применять формулу Ньютона–Лейбница при решении задач; использовать свойства определённого интеграла при решении практических задач; умеет решать более сложные и нестандартные задачи на определённый интеграл Умеет находить площадь криволинейной трапеции; использовать свойства определённого интеграла при решении практических задач; применять определённый интеграл для вычисления площадей и объёмов; объяснять, как образуются тела вращения, и вычислять их объёмы; уметь оценивать площади поверхностей и объёмы объектов реального мира	
1.3 Теория вероятностей и статистика	Знает определения перестановок, размещений и сочетаний без повторений, умеет определять и различать их; умеет решать более сложные комбинаторные задачи на перестановки, размещения и сочетания без повторений Умеет находить вероятность наступления хотя бы одного события; использовать формулы полной вероятности и Байеса при решении задач; применять элементы теории вероятностей для решения практических задач Имеет представление о дискретных случайных величинах, их видах и числовых характеристиках — математическом ожидании, дисперсии и среднем квадратическом отклонении; умеет вычислять математическое ожидание дискретной случайной величины и интерпретировать его как среднее значение распределения; умеет использовать числовые характеристики дискретных случайных величин при решении задач	3
2. Геометрия		
	Умеет выводить формулы для вычисления площади треугольника, используя свойства его высоты, медианы и биссектрисы; умеет применять теорему Пифагора и использовать её при решении задач; знает теоремы о центрах вписанной и описанной окружностей треугольника и умеет применять их при решении задач	10

2.1. Геометрия и измерения	Знает свойства параллелограмма и ромба и умеет применять их при решении задач (равенство противоположных углов, деление диагоналей пополам в точке пересечения); знает свойства прямоугольника и квадрата и умеет применять их при решении задач; умеет выводить формулы площадей параллелограмма, ромба, прямоугольника и квадрата и использовать их при решении задач Понимает свойство средней линии трапеции, умеет его доказывать и применять при решении задач; знает свойства вписанной и описанной окружностей трапеции и применяет их при решении задач; умеет выводить формулу площади трапеции и использовать её при решении задач Имеет представление о векторе в плоскости и пространстве, нулевом и единичном векторе, длине и направлении вектора; знает свойства сложения и вычитания векторов в пространстве; знает свойства умножения вектора на число; имеет представление о равных, противоположных, коллинеарных и компланарных векторах и умеет их различать; умеет представлять угол между двумя векторами в пространстве и находить его величину Умеет представлять параллельные и пересекающиеся прямые и плоскости в пространстве, а также скрещивающиеся прямые; умеет решать задачи о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве, используя метод проецирования Умеет устанавливать взаимосвязи между элементами призмы, применять формулы её площади поверхности и объёма; умеет строить различные сечения призмы и находить их площади Умеет устанавливать взаимосвязи между элементами цилиндра, применять формулы его площади поверхности и объёма; умеет строить различные сечения цилиндра и находить их площади Умеет устанавливать взаимосвязи между элементами пирамиды и усечённой пирамиды, применять формулы их площади поверхности и объёма; умеет строить различные сечения и находить их площади Умеет устанавливать взаимосвязи между элементами конуса и усечённого конуса, применять формулы их площади поверхности и объёма; умеет строить различные сечения и находить их площади Умеет изображать комбинации пространственных фигур в плоскости; умеет обосновывать решение задач, связанных с нахождением боковой и полной поверхности и объёма комбинаций пространственных фигур	
	Всего	**25**

IV. Распределение по когнитивным навыкам

Когнитивный уровень	Описание	Количество тестов
Знание (З)	Задания уровня знания – репродуктивные задания, предполагают сохранение учебного материала в памяти без его переработки и воспроизведение в знакомых ситуациях. Задания данного типа направлены на оценку знания закономерностей, свойств, понятий, сущности терминов и их запоминания	**5**
Применение (П)	Задания уровня применения – продуктивные задания, требуют от учащегося выбора изученных законов и закономерностей в соответствии с предложенной ситуацией, их анализа, сравнения, сопоставления, одновременного применения нескольких законов и закономерностей, обобщения, а также формулирования вывода.	**15**
Рассуждение (Р)	Задания уровня рассуждения – интеллектуальные задания, требуют от учащегося применения усвоенных знаний и умений в незнакомых ситуациях, анализа, синтеза, сравнительного сопоставления, использования законов и закономерностей для обобщения и формулирования вывода	**5**

V. Распределение по типам заданий

Тип задания	Описание	Количество заданий
Открытый тест с кратким ответом **(О1)**	письменные задания, требующие краткого ответа на вопрос одним предложением или короткой записью	16
Открытый тест на установление соответствия **(О2)**	письменные задания, требующие соотнесения ответов с содержанием вопроса	2
Открытый тест с развёрнутым ответом **(О3)**	письменные задания, требующие подробного письменного ответа на вопрос	7

Письменные работы учащихся на испытаниях итоговой государственной аттестации по каждому предмету оцениваются максимум в 100 баллов. Баллы, установленные за задания, определены с учётом уровня их сложности, объёма знаний, умений и логического мышления, необходимых для их выполнения. В зависимости от содержания и уровня трудности задания оцениваются разным количеством баллов. Критерии оценивания каждого задания представлены в форме оценивания. Ниже приведена таблица перевода баллов в оценку:

Таблица перевода баллов в оценку

Балл (%)	Оценка	Описание
0 – 29	“2”	“не удовлетворительно”
30 – 65	“3”	“удовлетворительно”
66 – 85	“4”	“хорошо”
86 – 100	“5”	“отлично”

VII. Форма оценивания

Этапы оценивания знаний, умений, навыков и компетенций учащегося, оцениваемые содержательные области, типы заданий, когнитивные процессы и критерии оценивания представлены в следующих таблицах.

Для предмета «Алгебра»:

Порядковый номер задания	Содержательная область	Тип задания	Когнитивный уровень	Критерий оценивания
1-ая часть				
1.	Алгебраические выражения	О1	З	4 балла
2.	Текстовые задачи	О1	П	6 баллов
3.	Прогрессии	О1	З	4 балла
4.	Функции (чтение графиков)	О2	З	4 балла
5.	Тригонометрические уравнения и неравенства	О1	П	6 баллов
6.	Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства и их системы	О1	П	6 баллов
7.	Вычисление производной	О1	П	6 баллов
8.	Интеграл: правила интегрирования, определенный интеграл	О1	П	6 баллов
9.	Задачи комбинаторики	О1	П	6 баллов
10.	Вероятность	О1	П	6 баллов
11.	Анализ данных	О1	П	6 баллов
2-ая часть				
12.	Логарифмические и показательныеуравнения и неравенства	О3	П	10 баллов
13.	Исследование функции с помощью производной и построение её графика.	О3	Р	10 баллов
14.	Задачи, решаемые с помощью	О3	Р	10 баллов

	производной			
15.	Нахождение площади криволинейной трапеции и объёма тела с помощью интеграла.	О3	Р	10 баллов
Всего		**100 баллов**		

Для предмета «Геометрия»:

Порядковый номер задания	**Содержательная область**	**Тип задания**	**Когнитивный уровень**	**Критерий оценивания**
1-ая часть				
1.	Треугольник и его элементы	О1	П	10 баллов
2.	Четырехугольники и их элементы	О1	П	10 баллов
3.	Векторы	О2	З	6 баллов
4.	Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве	О1	З	6 баллов
5.	Цилиндр	О1	П	10 баллов
6.	Пирамиды	О1	П	10 баллов
7.	Конус	О1	П	10 баллов
2-ая часть				
8.	Трапеция и ее элементы	О3	П	12 баллов
9.	Призмы	О3	Р	13 баллов
10.	Комбинация геометрических тел	О3	Р	13 баллов
Всего		**100 баллов**		

VIII. Порядок проведения экзамена

Запрещённые средства: во время экзамена строго запрещается пользоваться мобильным телефоном, умными часами, планшетом или заметками.

Этика и дисциплина: запрещаются списывание, обращение за помощью или оказание помощи другим, разговоры во время экзамена, выход из аудитории без разрешения и другие подобные действия.

При выявлении нарушения организатор составляет акт, отстраняет участника от тестирования, а его результат аннулируется.

IX. Рекомендуемая основная литература

1. Учебник по математике для 5 класса. Части I и II. Б. Хайдаров. Ташкент, 2020.
2. Учебник по математике для 6 класса. Ш. Исмоилов (и др.). Ташкент, 2022.
3. Учебник по алгебре для 7 класса. А. Акмолов (и др.). Ташкент: Республиканский учебный центр, 2022.
4. Учебник по геометрии для 7 класса. Б. Хайдаров, Н. Таштемирова, И. Асроров. Ташкент: Республиканский учебный центр, 2022.
5. Учебник по алгебре для 8 класса. Ш. А. Алимов, А. Р. Халмухамедов, М. А. Мирзаахмедов. Ташкент: «Учитель», 2019.
6. Учебник по геометрии для 8 класса. А. А. Рахимкория. Ташкент: «Узбекистан», 2019.
7. Учебник по алгебре для 9 класса. Ш. А. Алимов, А. Р. Халмухамедов, М. А. Мирзаахмедов. Ташкент: «Учитель», 2019.
8. Учебник по геометрии для 9 класса. Б. К. Хайдаров, Э. С. Сариков, А. Ш. Кучкаров. Ташкент: «Право и Общество», 2019.
9. Алгебра и основы анализа. Учебник для 10 класса. А. Зайтов (и др.). Ташкент: Республиканский учебный центр, 2022
10. Геометрия. Учебник для 10 класса. Б. Хайдаров (и др.). Ташкент: Республиканский учебный центр, 2022
11. Математика. 11 класс, части I и II. М.А. Мирзаахмедов, Ш.Н. Исмоилов, А.К. Аманов. Ташкент, 2018

I. Алгебраические выражения

1. Сократите дробь:

$$\frac{a^2+\frac{1}{a}}{a+\frac{1}{a}-1}$$

2. Упростите:

$$(2a+3b)(2a+3b+2)-(2a-3b-2)(2a-3b)$$

3. Вычислите:

$$\frac{765^2-761^2}{764^2-762^2}$$

4. Сократите дробь:

$$\frac{(3x+1)^4-1}{9x^2+6x+2}$$

5. Упростите:

$$(3a+5)^2-9a-(3a-2)(2+3a)$$

6. Вычислите:

$$\frac{48^3-12^3}{36}+48\cdot 12$$

7. Сократите дробь:

$$\frac{a^3-5a^2+9a-5}{a^2-4a+5}$$

8. Вычислите:

$$(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)-\frac{1}{8}\cdot 3^{32}$$

9. Сократите дробь:

$$\frac{(x-1)(x+2)-x(x+3)}{x+1}$$

10. Вычислите:

$$\frac{18^3+15^3}{33}-18\cdot 15$$

II. Текстовые задачи

1. На предприятии имеются две машины для измельчения бумаги. Вторая машина была включена через 9 часов после начала работы первой, и вместе они завершили измельчение всей бумаги за 20 часов с момента начала работы первой машины. За сколько часов вторая машина сможет измельчить всю бумагу, работая самостоятельно?

2. Учащиеся добровольно красят стены школы. Согласно плану администрации, при одинаковой производительности труда:
   - 12 учеников должны завершить работу к 15-му числу месяца,
   - 7 учеников – к 20-му числу месяца.

   Учитывая, что школьники выполняют одинаковый объём работы в день, определите, сколько учеников потребуется для покраски стен, если работа начнётся в запланированный день и должна завершиться к 22-му числу месяца?

3. Рустам и Абдуллох работают в ремонтной бригаде. Рустам может самостоятельно отремонтировать одну квартиру за 9 дней, а Абдуллох — за 15 дней. Они начинают работать вместе, но через 3 дня Рустам уходит на другой объект. За сколько дней Абдуллох завершит оставшуюся работу, если он продолжит ремонт в одиночку?

4. По одной дороге между городами Самарканд и Бухара движутся два автомобиля: один — из Самарканда в Бухару, другой — из Бухары в Самарканд. Оба автомобиля выезжают в 11:00. Двигаясь с постоянной скоростью, они встречаются в 13:00. Во сколько прибудет в Самарканд автомобиль, выехавший из Бухары, если автомобиль, выехавший из Самарканда, прибывает в Бухару в 14:00?

5. Юсуф и Дурбек возвращаются домой из школы. Расстояние между школой и домом составляет 12 km, при этом в их распоряжении есть только один велосипед. Об их скоростях при ходьбе и на велосипеде известно:
   - Юсуф: пешком – 5 km/h, на велосипеде – 10 km/h;
   - Дурбек: пешком – 4 km/h, на велосипеде – 8 km/h.

   Сначала Юсуф едет на велосипеде, а Дурбек идёт пешком. Достигнув некоторой точки, Юсуф оставляет велосипед и продолжает путь пешком. Дурбек, дойдя до этой точки, берёт велосипед и продолжает путь на нём. Сколько километров Дурбек проехал на велосипеде, если оба прибыли домой одновременно?

6. Азиз и Камол возвращаются домой со спортивной тренировки. Расстояние между местом тренировки и домом составляет 15 km, при этом у них есть только один скутер. Об их скоростях известно:
   - Азиз: пешком – 6 km/h, на скутере – 12 km/h;
   - Камол: пешком – 4 km/h, на скутере – 8 km/h.

   Сначала Азиз едет на скутере, а Камол идёт пешком. Достигнув некоторой точки, Азиз оставляет скутер и продолжает путь пешком. Камол, дойдя до этой точки, берёт скутер и продолжает путь на нём. Сколько km Азиз прошёл пешком, если оба прибыли домой одновременно?

7. Зилола и Сардор приобрели в книжном магазине по четыре одинаковых набора книг. При этом:
   - Зилола скачала мобильное приложение магазина и оформила покупку через него, получив скидку на 15% на каждый товар, а также дополнительную скидку 60 тысяч сум на весь заказ.
   - Сардор, совершив покупку в самом магазине, воспользовался акцией «4 по цене 3».

   Определите, сколько тысяч сум стоит один набор книг, если Зилола заплатила на 30 тысяч сум больше, чем Сардор.

8. В первом сплаве отношение меди к золоту равно 2:3, во втором – 3:4. Какую долю (часть) нужно взять из первого сплава, чтобы в новом сплаве эти металлы были в отношении 11:15?

9. Бобур купил в двух магазинах всего 10 наушников (изначальная цена у всех одинаковая). В первом магазине на наушники действует скидка на 20%, во втором – на 40%. Определите, сколько наушников Бобур купил в первом магазине, если он сэкономил 160 000 сум при покупке 10 наушников и всего потратил 340 000 сум.

10. Имеются два сплава золота и серебра. В первом сплаве золото и серебро находятся в отношении 2:3, во втором – 3:7. Сколько kg нужно взять из второго сплава, чтобы получить 8 kg сплава, в котором золото и серебро находятся в отношении 5:11?

III. Прогрессии

1. Определите порядковый номер числа 701 в прогрессии 1, 8, 15, 22, ….

2. Найдите значение a_{100} арифметической прогрессии, если $a_1 = 7$ и $d = 5$.

3. Найдите значение n геометрической прогрессии, если $b_1 = 2$, $q = 3$ и $b_n = 4374$.

4. Найдите сумму первых 6 членов прогрессии $-1,\ 3,\ -9, \ldots$.

5. Определите порядковый номер числа 0,75 в прогрессии 96, 48, 24, 12, … .

6. Найдите значение n арифметической прогрессии, если $a_1 = 3$, $d = 17$ и $a_n = 258$.

7. Найдите значение b_7 геометрической прогрессии, если $b_1 = 5$ и $q = 3$.

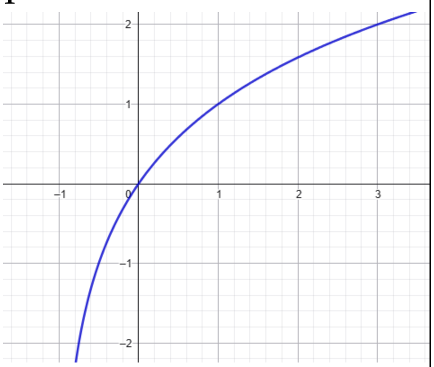
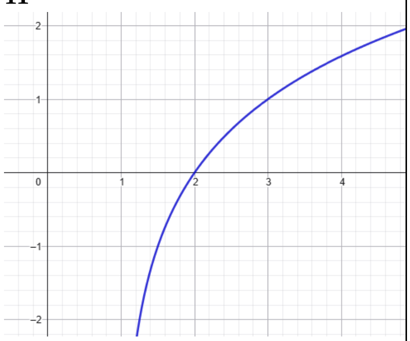
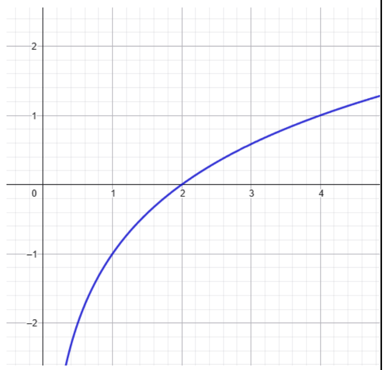
8. Найдите сумму первых 18 членов прогрессии $-1,\ 3,\ 7, \ldots$.

9. Найдите значение a_{14} арифметической прогрессии, если $a_1 = 3$ и $d = 19$.

10. Найдите значение b_9 геометрической прогрессии, если $b_1 = 7$ и $q = 2$.

IV. Функции (чтение графиков)

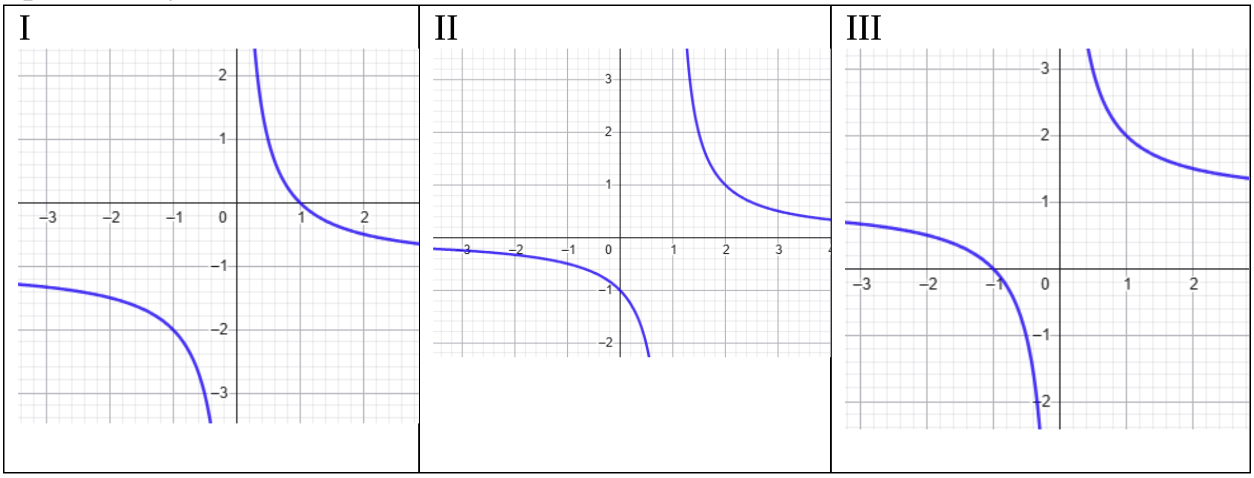
1. Найдите аналитический вид функций, соответствующий приведённым графикам, и установите соответствие.

I	II	III
		

A.	B.	C.	D.
$y = log_2(x-1)$	$y = log_2(x+1)$	$y = log_2 x + 1$	$y = log_2 x - 1$

	I	II	III
Ответ:			

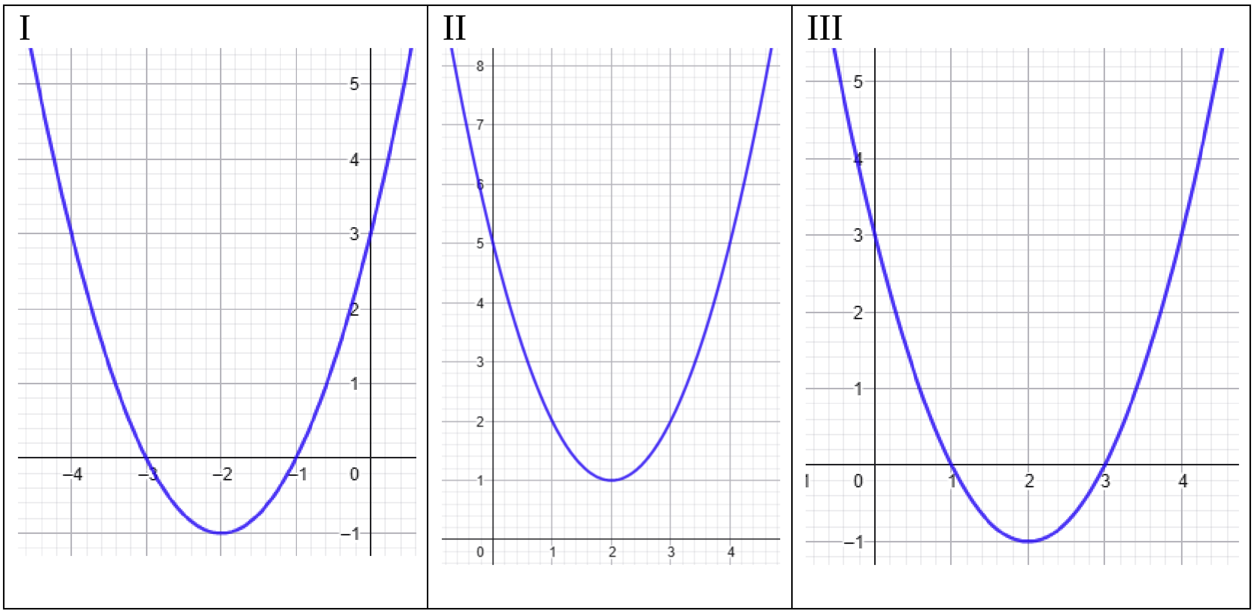
2. Найдите аналитический вид функций, соответствующий приведённым графикам, и установите соответствие.



A.	B.	C.	D.
$y = \dfrac{1}{x+1}$	$y = \dfrac{1}{x-1}$	$y = \dfrac{1}{x} - 1$	$y = \dfrac{1}{x} + 1$

	I	II	III
Ответ:			

3. Найдите аналитический вид функций, соответствующий приведённым графикам, и установите соответствие.

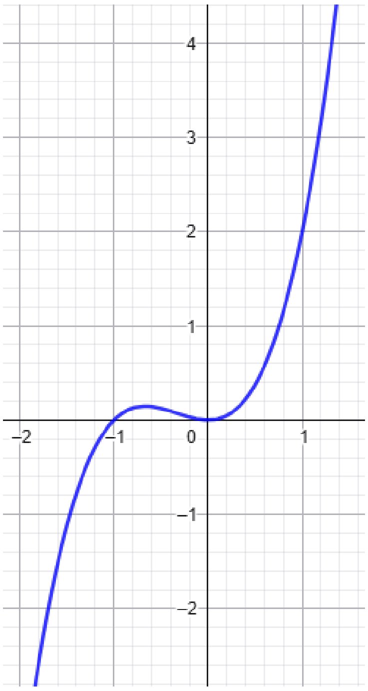


A.	B.	C.	D.
$y = (x+2)^2 - 1$	$y = (x+2)^2 + 1$	$y = (x-2)^2 + 1$	$y = (x-2)^2 - 1$

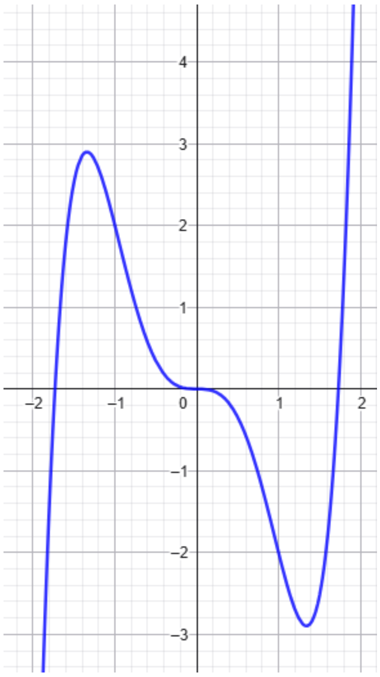
	I	II	III
Ответ:			

4. Используя приведённые графики, определите чётность/нечётность функции и установите соответствие.

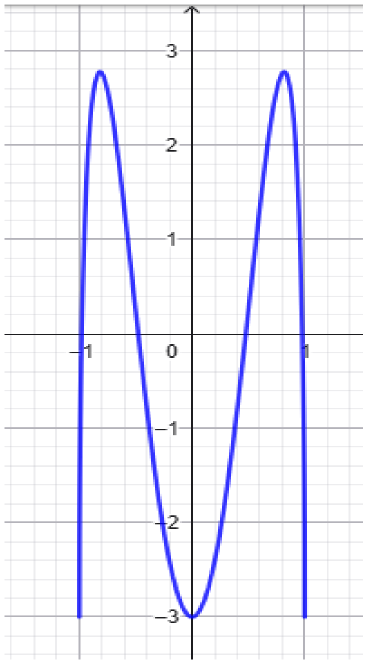
I



II



III

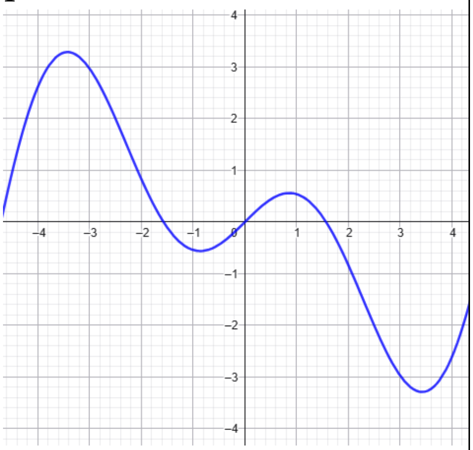


A. Нечетная	B. Четная	C. Ни четная, ни нечетная

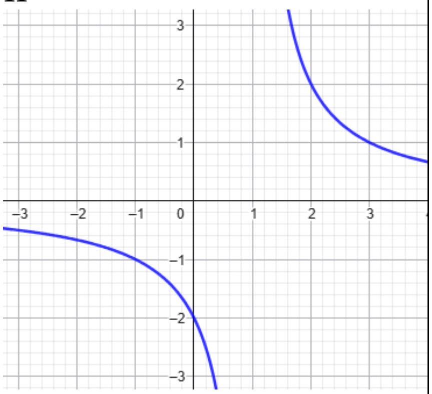
	I	II	III
Ответ:			

5. Используя приведённые графики, определите чётность/нечётность функции и установите соответствие.

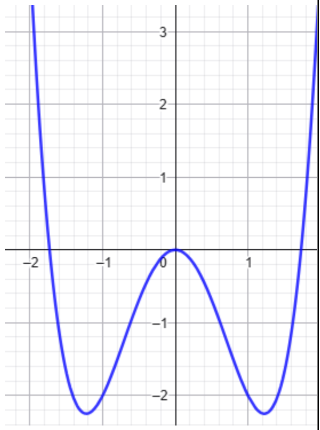
I



II



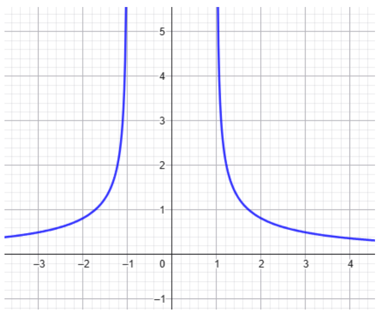
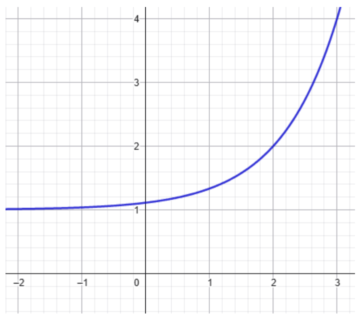
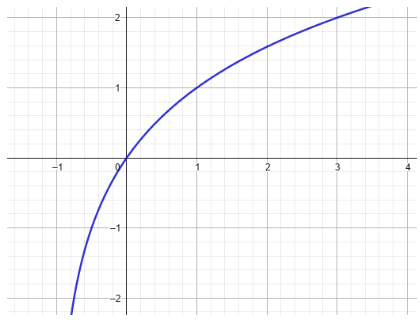
III



A. Нечетная	B. Четная	C. Ни четная, ни нечетная

	I	II	III
Ответ:			

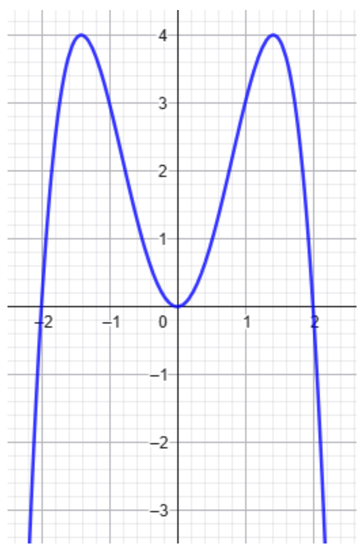
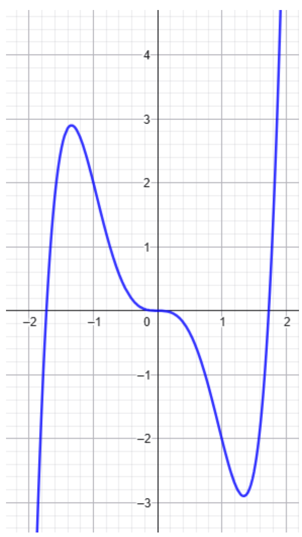
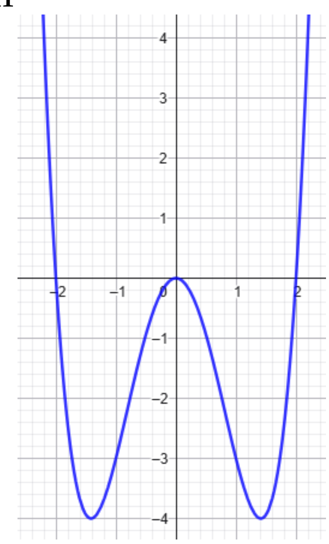
6. Используя приведённые графики, определите чётность/нечётность функции и установите соответствие.

I	II	III
		

A.	B.	C.	D.
$(-1; \infty)$	$(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$	$(1; \infty)$	$(-\infty; \infty)$

	I	II	III
Ответ:			

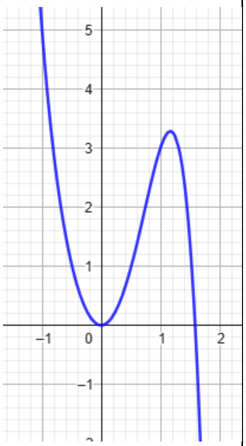
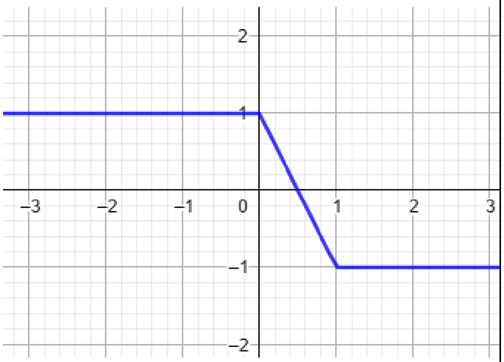
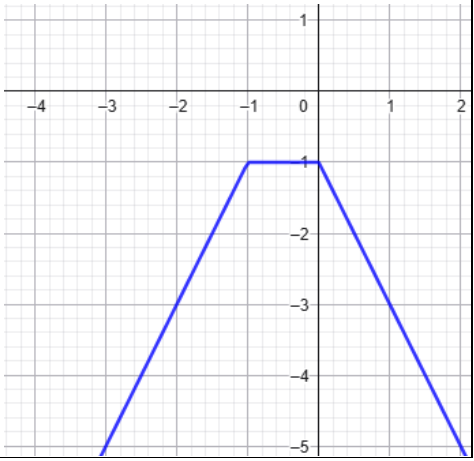
7. Используя приведённые графики, определите множество значении функции и установите соответствие.

I	II	III
		

A.	B.	C.	D.
$(-2; 2)$	$(-\infty; \infty)$	$(-\infty; 4]$	$[-4; \infty)$

	I	II	III
Ответ:			

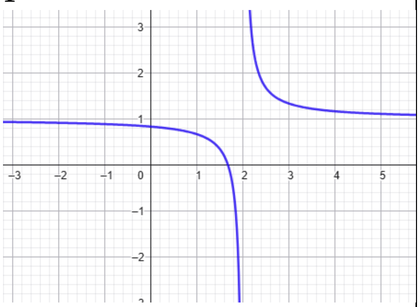
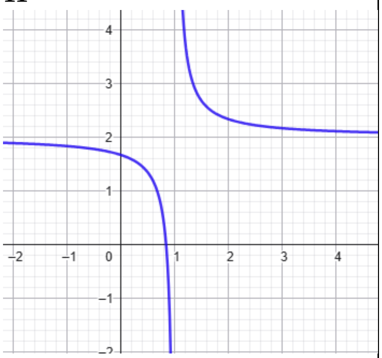
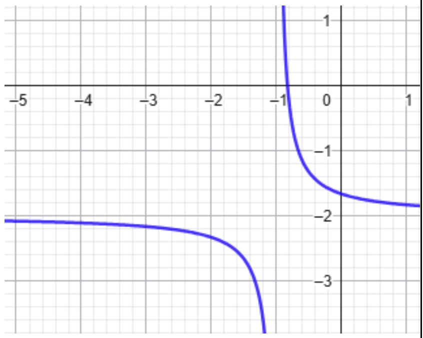
8. Используя приведённые графики, определите множество значении функции и установите соответствие.

I	II	III
		

A. $(-1; 2)$	B. $(-\infty; \infty)$	C. $(-\infty; 1]$	D. $[-1; 1]$

	I	II	III
Ответ:			

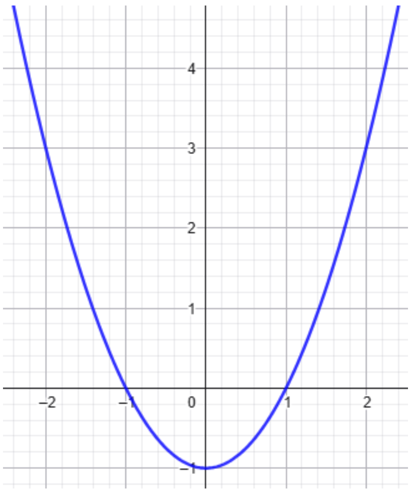
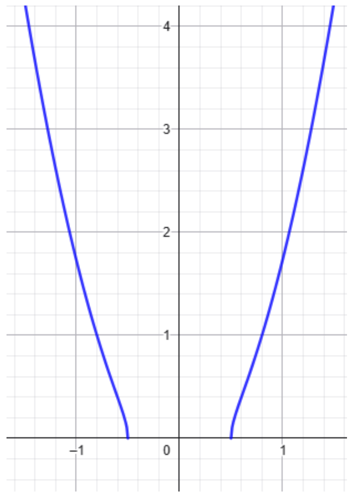
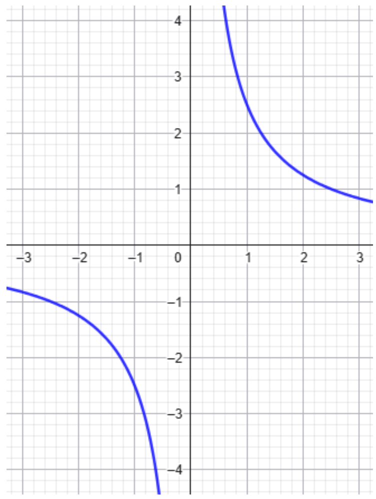
9. Используя приведённые графики, определите область определения функции и установите соответствие.

I	II	III
		

A. $(-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$	B. $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$	C. $(-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$	D. $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$

	I	II	III
Ответ:			

10. Используя приведённые графики, определите чётность/нечётность функции и установите соответствие.

I	II	III
		

A. Нечетная	B. Четная	C. Ни четная, ни нечетная

	I	II	III
Ответ:			

V. Показательные и лограифмические уравнения и неравенства

1. Решите систему неравенств.

$$\begin{cases} log_5 x + log_x 5 = 2 \\ x^2 + y = 12 \end{cases}$$

2. Решите уравнение.

$$lg(x^2) + lg^2(-x) = 3$$

3. Найдите сумму целых решений уравнения.

$$log_2 x \cdot log_3 x = log_2 x^2 + log_3 x^3 - 6$$

4. Решите уравнение

$$lg(x+10) + 0{,}5lg(x^2) = 2 - lg4$$

5. Решите неравенство.

$$log_{\frac{1}{6}}(x^2 - 3x + 2) > -1$$

6. Решите уравнение.

$$\frac{5^x + 1}{9} = \frac{18}{5^{x+1} + 2}$$

7. Решите неравенство.

$$6^x - 9 \cdot 2^x + 3^{x+2} - 9^x > 0$$

8. Решите неравенство.

$$\frac{7}{3^x + 1} \le \frac{20}{3 - 3^x}$$

9. Решите уравнение.

$$9^x + 6^x = 2^{2x+1}$$

10. Найдите произведение корней уравнения.

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$$

VI. Тригонометрические уравнения и неравенства

1. Найдите $tg(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ для корней уравнения на отрезке $[0; \pi]$.

$$2sin^2x - 5sinxcosx - 8cos^2x = -2$$

2. Найдите число решений уравнения.

$$\frac{1 - 2|sinx|sinx}{\sqrt{x(8-x)}} = 0$$

3. Найдите сумму (в градусах) решений уравнения на отрезке $[-\pi; \pi]$.

$$\frac{1}{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(3x + \pi)$$

4. Найдите сумму (в градусах) решений уравнения на отрезке $[0; 2\pi]$.

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 20° + \operatorname{tg} 40° \cdot \operatorname{tg} 20° + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 40° = 1$$

5. Найдите сумму (в градусах) решений уравнения на отрезке $[0; 2\pi]$

$$\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x$$

6. Найдите модуль разности (в градусах) наибольшего и наименьшего неравенства уравнения на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.

$$(2\cos x - 1)(\cos 2x - 2) \leq 0$$

7. Найдите сумму (в градусах) наибольшего и наименьшего решений неравенства на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$.

$$\sin x \cos^3 x - \sin^3 x \cos x \geq \frac{1}{8}$$

8. Найдите тангенс суммы наибольшего и наименьшего решений уравнения на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

$$3\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x \leq 1$$

9. Найдите (в градусах) наибольшее решение неравенства на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

$$\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} 10° - \operatorname{ctg} 10° \cdot \operatorname{ctg} 70° - \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} 70° < 1$$

10. Найдите сумму (в градусах) наибольшего и наименьшего решений неравенства на отрезке $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$.

$$\operatorname{tg} x + 1 \leq \frac{1}{\sqrt{3}\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

VII. Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства и их системы

1. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

$$\frac{3-2x}{6} > \frac{x-1}{4} - \frac{2x}{3} + 1$$

2. Решите неравенство:

$$\sqrt{x^2-9x+24} - \sqrt{6x^2-59x+149} \geq 0$$

3. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного решений неравенства:

$$(x-3)\sqrt{x^2+3} \leq x^2-9$$

4. Найдите сумму целых решений системы неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{4} + \dfrac{x+5}{2} < 6 \\ (x+2)(x-3) \leq (x+3)(x-1) \end{cases}$$

5. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+6}}{x} > 1 \\ \sqrt{5-x} \leq 2 \end{cases}$$

6. Найдите сумму корней уравнения:

$$\frac{12}{x+2} + \frac{12}{x-2} = 2{,}5$$

7. Решите уравнение:

$$6\sqrt{81x^2+54x+45} + 6x + 9x^2 = 35$$

8. Найдите сумму решений системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{16}{x+y} + \dfrac{3}{x-y} = 7 \\ \dfrac{24}{x+y} - \dfrac{5}{x-y} = 1 \end{cases}$$

9. Найдите значение выражения $2x - y^2$ для значений x и y, являющихся решением системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

10. Найдите значение выражения $x - xy + y$ для значений x и y, являющихся решением системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 12 \\ x^2 + xy + y^2 = 96 \end{cases}$$

VIII. Вычисление производной

1. Найдите производную функции $f(x) = cos2x - 2sinx$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$.

2. Найдите производную функции $f(x) = x - x^2 + 2$ в точке $x = -2$.

3. Найдите производную функции $f(x) = ctg^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ в точке $x = \frac{\pi}{6}$.

4. Найдите производную функции $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ в точке $x = 3$.

5. Найдите производную функции $f(x) = \ln\left(cos\frac{x}{2}\right)$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$. $(cos\frac{x}{2} > 0)$

6. Найдите производную функции $f(x) = x\sqrt{7 + x^2}$ в точке $x = 3$.

7. Найдите производную функции $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ в точке $x = 2$.

8. Найдите производную функции $f(x) = x\ln 2x - x\ln 6$ в точке $x = 3$.

9.Найдите производную функции $f(x) = sin^2 2x + sinx$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$.

10. Найдите производную функции $f(x) = arctg(\sqrt{3x + 1})$ в точке $x = 1$.

IX. Исследование функции с помощью производной и построение её графика

1. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте её график: $f(x) = x^3 - 12x + 6$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте её график: $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$.

3. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте её график: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$.

4. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте её график:
$f(x) = x^3 - 12x^2 + 7.$
5. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте её график:
$f(x) = x^3 + 3x^2 - 12.$

6. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте её график:
$f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6.$

7. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте её график:
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x.$

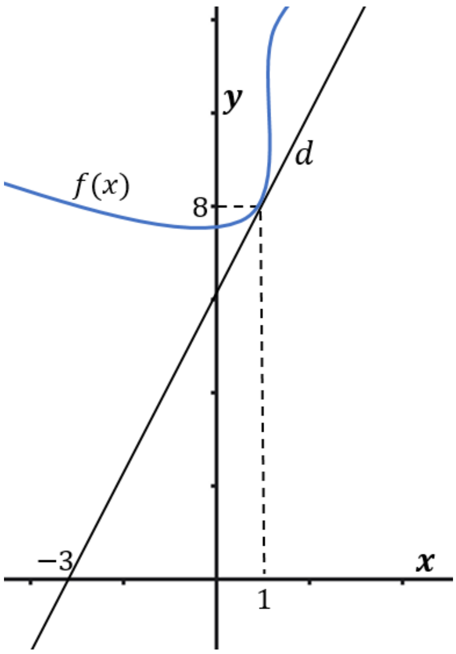
8. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте её график:
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x.$

9. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте её график:
$f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x.$

10. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте её график:
$f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3.$

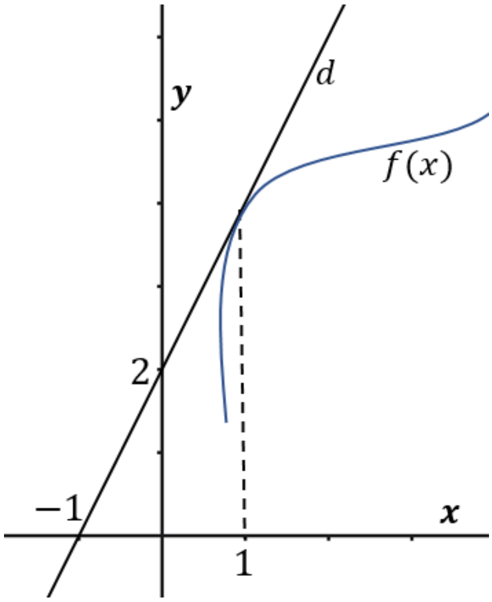
X. Задачи, решаемые с помощью производной

1. На рисунке изображена функция $f(x)$ и проведённая к ней касательная прямая d.



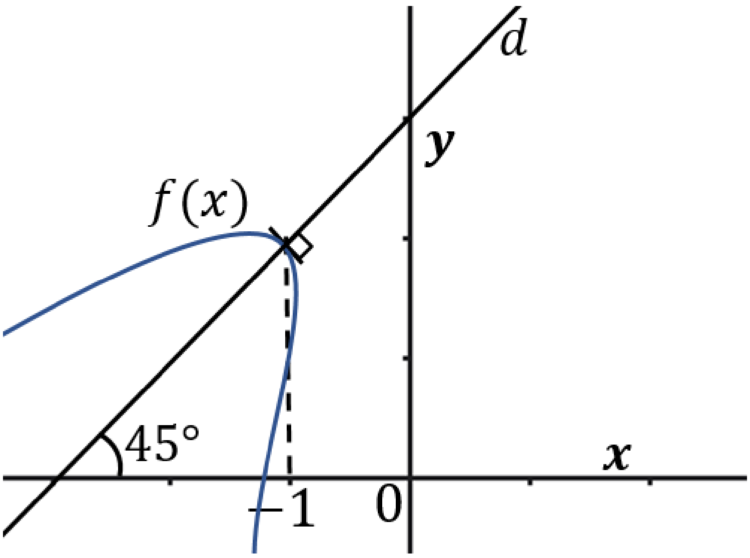
Найдите значение $g'(1)$, если для функции $g(x)$ выполняется равенство $g(2x-1) = x^2 \cdot f(x) + 3$.

2. На рисунке изображено, как функция $f(x)$ касается прямой d в точке с абсциссой $x = 1$.



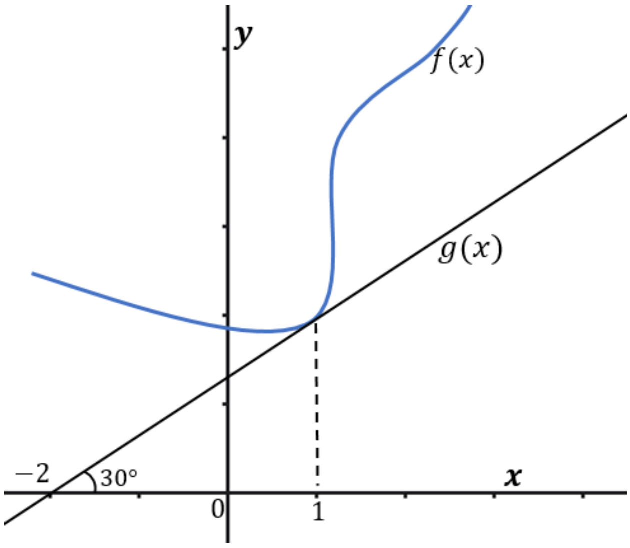
Найдите значение $g'(1)$, если для функции $g(x)$ выполняется равенство $g(x) = \frac{f(x)}{x^2+2x} - 16$.

3. На рисунке изображена функция $f(x)$ и проведённая к ней нормаль (прямая d) в точке с абсциссой $x = -1$.



Найдите значение параметра a, если функция $f(x)$ имеет вид $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-ax+1-a}$.

4. На рисунке изображена функция $f(x)$ и проведённая к ней касательная прямая (прямая $g(x)$) в точке с абсциссой $x = 1$.



Найдите значение $h'(1)$ если для функции $h(x)$ выполняется равенство $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

5. Две материальные точки движутся вдоль прямой. Их координаты в зависимости от времени заданы следующим образом:
$$S_1(t) = t^3 - 7t^2 + 4t - 3 \text{ и } S_2(t) = 3t^2 - 8t + 5$$
Среди моментов времени, при которых скорости тел равны, найдите наименьшее расстояние между ними.

6. Две материальные точки движутся вдоль прямой. Их координаты в зависимости от времени заданы следующим образом:
$$S_1(t) = 2t^4 \text{ и } S_2(t) = t^4 + 10t^3 - 24t^2 + 6$$
Среди моментов времени, при которых ускорения тел равны, найдите значение разности их скоростей $|v_1(t) - v_2(t)|$ в тот момент, когда тела движутся в противоположных направлениях.

7. Две материальные точки движутся вдоль прямой. Их координаты в зависимости от времени заданы следующим образом:
$$S_1(t) = 2t^4 \text{ и } S_2(t) = t^4 + 10t^3 - 24t^2 + 30t + 6$$
Среди моментов времени, при которых ускорения тел равны, найдите значение t, при котором разность их скоростей $|v_1(t) - v_2(t)|$ принимает локально минимальное значение.

8. Анвар владеет двумя предприятиями.
   - На обоих предприятиях производится одинаковый вид продукции.
   - Если на предприятии рабочие за неделю отрабатывают в сумме t^2 часов, то это предприятие производит t единиц продукции.
   - На первом предприятии почасовая оплата труда составляет 20 000 сум, на втором – 30 000 сум.

Определите, сколько продукции должно быть произведено на каждом предприятии, чтобы общий объём производства был максимальным, если Анвар выделяет на недельную оплату труда рабочих в общей сложности 120 000 000 сум.

9. На двух предприятиях производится одинаковый вид продукции.
   - Если на первом предприятии суммарное рабочее время за один день составляет a^2 часов, то производится a единиц продукции.
   - Если на втором предприятии суммарное рабочее время за один день составляет b^3 часов, то производится $2b^2$ единиц продукции.
   - На обоих предприятиях почасовая оплата труда составляет 30 000 сум.

   Если за одну неделю планируется произвести всего 131 единицу продукции, найдите наименьшую возможную сумму недельной заработной платы рабочих.

10. На двух предприятиях производится одинаковый вид продукции.
    - Если на первом предприятии суммарное рабочее время за один день составляет a^3 часов, то производится a^2 единиц продукции.
    - Если на втором предприятии суммарное рабочее время за один день составляет b^2 часов, то производится $2b$ единиц продукции
    - На обоих предприятиях почасовая оплата труда составляет 30 000 сум.

    найдите наибольшее общее количество продукции, которое может быть произведено за этот день на двух предприятиях, если за один день на оплату труда выделено всего 3 млн сум.

XI. Методы интегрирования, определенный интеграл

1. Вычислите определенный интеграл:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}\,dx$$

2. Вычислите определенный интеграл:

$$\int_{9}^{36} \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

3. Вычислите определенный интеграл:

$$\int_{0}^{\pi} x\cdot\cos x\,dx$$

4. Вычислите определенный интеграл:

$$\int_{0}^{1} |5x-3|\,dx$$

5. Вычислите определенный интеграл (примите $\pi = 3{,}14$):

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$$

6. Вычислите определенный интеграл (примите $e \approx 2{,}7$):

$$\int_1^2 x \cdot e^x dx$$

7. Вычислите определенный интеграл (примите $\pi = 3{,}14$):

$$\int_0^{\pi} \sin^2 2x\, dx$$

8. Вычислите определенный интеграл:

$$\int_{-1}^{11} \frac{dx}{\sqrt{2x + 3}}$$

9. Вычислите определенный интеграл:

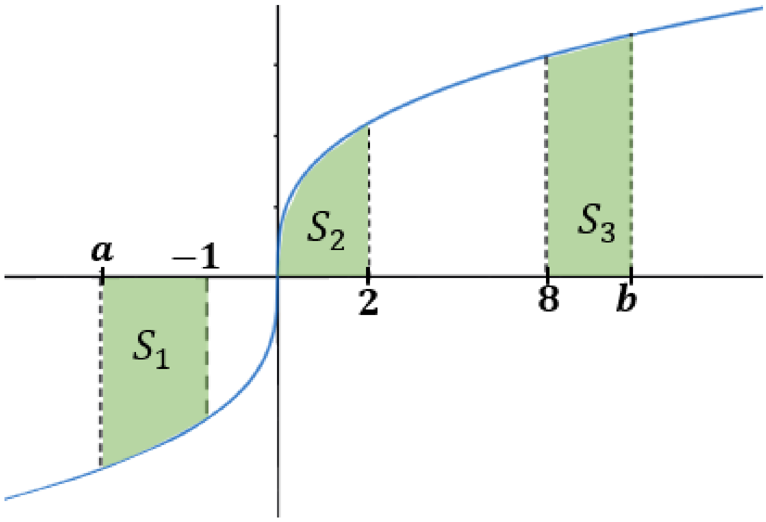
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \cdot \sin x\, dx$$

10. Вычислите определенный интеграл:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cdot \cos x\, dx$$

XII. Вычисление объема тела и площади криволинейной трапеции с помощью интеграла

1. На рисунке изображен график функции $y = 2\sqrt[3]{x}$

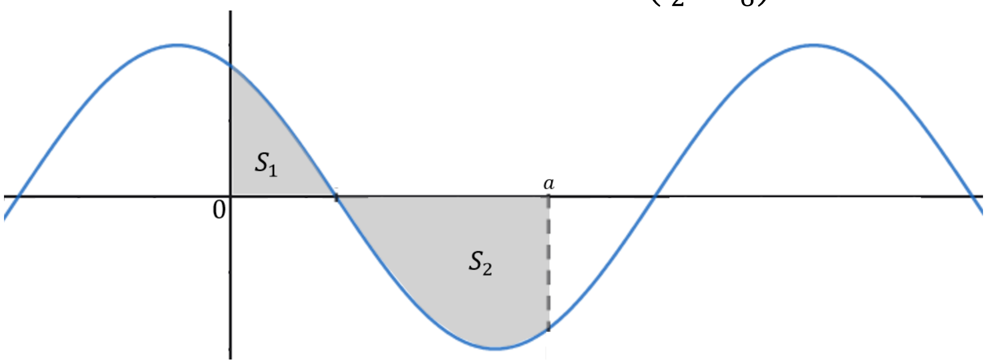


Для площадей криволинейных трапеции S_1, S_2 и S_3 выполняется равенство $S_1 = S_3$. Найдите:

a) значение S_2;

b) значение выражения $\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{b^4}$.

2. На рисунке изображен график функции $y = cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$



Известно, что выполняется равенство $3S_1 = S_2$. Найдите:

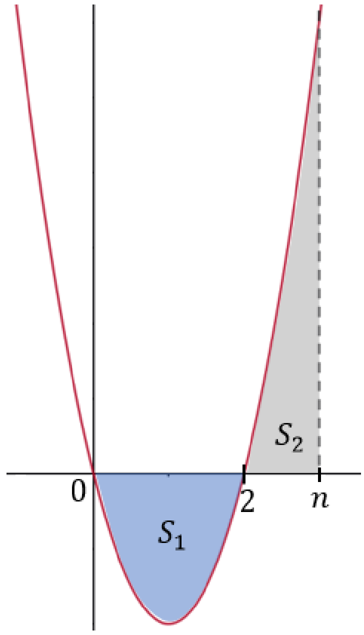
a) значение S_1;

b) значение a.

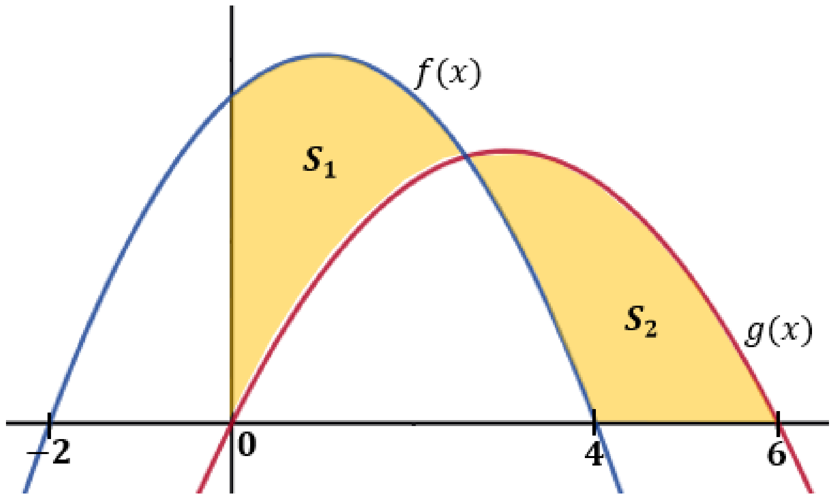
3. Дан треугольник, ограниченный прямыми $4x - 2y + 6 = 0$, $2x + 3y - 5 = 0$ и $y = 0$. Внутри треугольника кривая $y = x^3$ еделит его на две части. Найдите отношение площади большей из полученных областей к площади меньшей.

4. На рисунке изображен график функции $y = 3x^2 + ax + b$.

Известно, что выполняется равенство $5S_1 = S_2$. Найдите:
a) значение выражения $a + b$;
b) значение n.



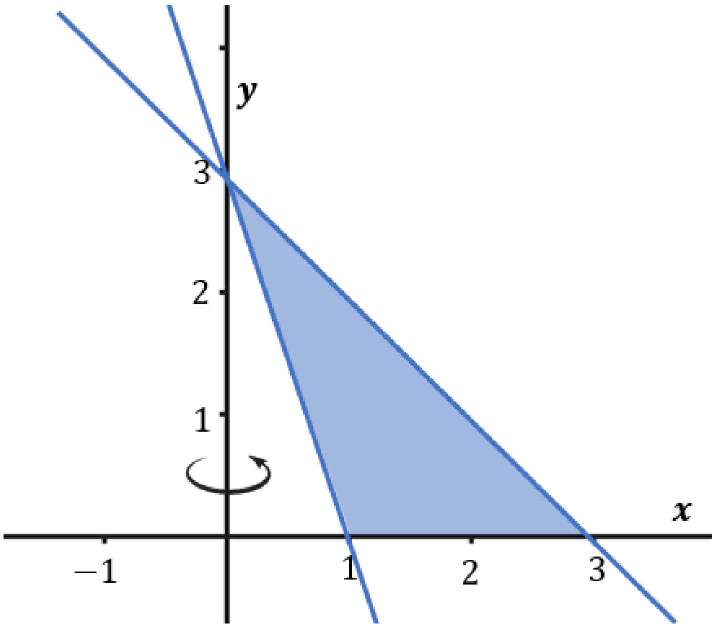
5. На рисунке изображен графики функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + dx + e$.



Площади S_1 и S_2 равны. Найдите:
a) значение d;
b) значение a.

6. Для области, ограниченной кривой $y = \frac{2}{x}$ и прямыми $0{,}5 \le x \le 4$ и $0{,}5 \le y \le 4$ найдите:
a) ее площадь;
b) объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy данной области.

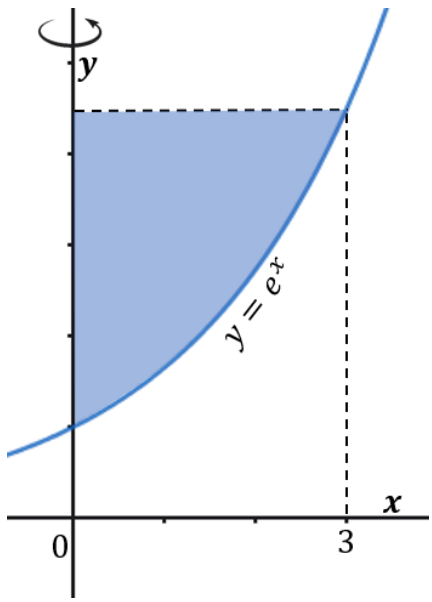
7. Для области, изображенной на рисунке, найдите:
a) ее площадь;
b) объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy данной области.



8. Для области, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$, найдите:
   a) ее площадь;
   b) объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy данной области.

9. Для области, ограниченной кривыми $y = x^3$ и $y = \sqrt{x}$, найдите:
   a) ее площадь;
   b) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox данной области.

10. Для области, изображенной на рисунке, найдите:
   a) ее площадь;
   b) объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy данной области.

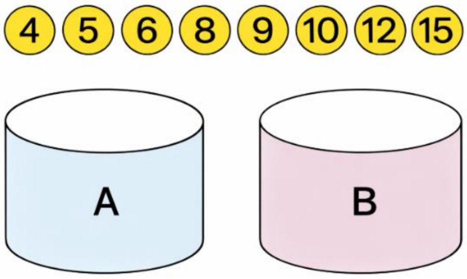


XIII. Задачи комбинаторики

1. Каждая сторона прямоугольника разделена на 5 равных частей. Сколько треугольников можно построить с вершинами в точках деления?

2. На предприятии работают 5 техников и 4 инженера. Из них выбирают 3 сотрудников. В скольких выбранных группах будет хотя бы по одному сотруднику из каждого подразделения?

3. 8 шаров с записанными на них числами распределяются по двум ящикам A и B так, чтобы в каждом было по 4 шара. Требуется, чтобы произведение чисел на шарах в каждом ящике делилось на 5. Найдите число таких распределений.



4. У учителя есть 6 учеников. Он хочет задать домашнее задание 3 ученикам по математике и 4 ученикам по физике. При этом одному ученику задание не задаётся вовсе, а 2 ученика получают задания и по математике, и по физике. Сколькими способами учитель может распределить домашние задания?

5. В доме для завтрака имеются: сливочное масло, сметана, мёд, рыба, яйца и сыр. Достон хочет выбрать три разных продукта для завтрака. При этом:
   - если он выбирает сливочное масло или сметану, то не выбирает их вместе.
   - если он выбирает рыбу или мёд, то не выбирает их вместе.

   Сколько различных вариантов завтрака может составить Достон при данных условиях?

6. 5 одинаковых жёлтых и 3 одинаковых красных шара размещаются вдоль прямой. Сколько различных способов размещения существует, если никакие два красных шара не стоят рядом?

7. У входа в дом в ряд расположены 7 одинаковых ламп. Некоторые из них могут быть включены, некоторые — выключены. В целях экономии электроэнергии хозяин хочет включить 3 из 7 ламп так, чтобы ни одна включённая лампа не находилась рядом с другой включённой лампой. Сколькими способами можно включить лампы при этом условии?

8. На кухне имеется двусторонний стол. С каждой стороны стола можно поставить не более 4 стульев. Одна сторона — со стороны окна, другая — со стороны двери, то есть они различаются. Сколькими способами можно рассадить 5 человек за столом? (Порядок рассадки важен).

9. В одной школе работают 8 учителей математики, 4 учителя физики и 7 учителей английского языка. Ни один учитель не преподаёт одновременно два или все три предмета. Из этих учителей формируется комиссия из 6 человек. В комиссии

должны быть представители всех трёх предметов, при этом число учителей математики должно быть больше, чем число учителей каждого из остальных предметов. Сколько различных комиссий можно составить при этих условиях?

10. В спортивном клубе есть 5 нападающих, 4 защитника и 3 запасных игрока. Тренер хочет выпустить на поле 5 футболистов. В выбранном составе должен быть хотя бы один нападающий, один защитник и один запасной игрок. Найдите количество таких составов.

XIV. Вероятность

1. Муродали во время тренировки бросает баскетбольный мяч в корзину. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,6. Муродали продолжает броски до первого попадания. Сколько минимум бросков должен сделать Муродали, чтобы вероятность того, что мяч попадёт хотя бы один раз, была не менее 0,9?

2. В процессе выпечки хлеба масса свежеиспечённой булочки контролируется путём измерения. Известно, что вероятность того, что масса булочки меньше 250 g, равна 0,97. Также вероятность того, что масса булочки больше 180 g, равна 0,85. Найдите вероятность того, что масса булочки больше 180 g и меньше 250 g.

3. Комната освещается тремя лампочками. Вероятность перегорания каждой лампочки в течение трёх месяцев равна 0,2. Считается, что события перегорания лампочек независимы. Найдите вероятность того, что за три месяца не перегорят как минимум две лампочки.

4. Автоматизированная производственная линия выпускает батареи. Вероятность того, что произведённая батарея окажется неисправной, равна 0,04. Каждая батарея проверяется автоматической системой контроля.
   - Если батарея неисправна, система определяет её как неисправную с вероятностью 0,96.
   - Если батарея исправна, система ошибочно определяет её как неисправную с вероятностью 0,01.

   Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарея будет определена системой как неисправная.

5. На фабрике по производству керамической посуды 25% произведённых тарелок оказываются бракованными. В процессе контроля качества выявляется 80% бракованных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите

вероятность того, что случайно выбранная из продажи тарелка окажется без дефекта.

6. В торговом центре установлены два одинаковых автомата по продаже кофе. К концу дня вероятность того, что в каждом автомате закончится кофе, равна 0,1. При этом вероятность того, что к концу дня кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,04. Найдите вероятность того, что к концу дня в обоих автоматах останется кофе.

7. На экзамене анализируются результаты тестирования студентов. Известно, что вероятность того, что балл студента меньше 98, равна 0,95, а вероятность того, что балл больше 72, равна 0,79. Найдите вероятность того, что балл случайно выбранного студента больше 72 и меньше 98..

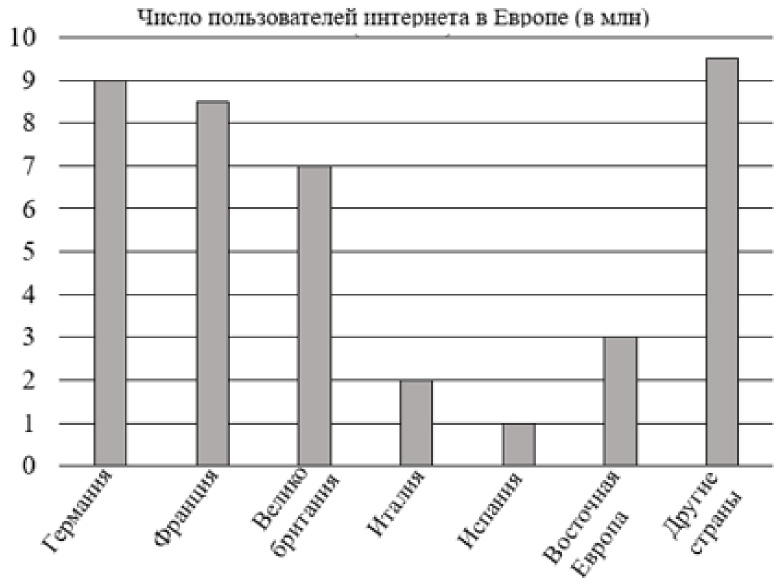
8. В одном городе среди населения до 35 лет (молодёжи) 52% составляют девушки. 21,6% молодёжи относятся к категории подростков. Также 24% девушек относятся к категории подростков. Для социологического опроса случайным образом выбран один юноша, проживающий в этом городе. Найдите вероятность того, что выбранный юноша является подростком..

9. Среди учащихся 11 класса девочки составляют 40%. В целом по классу в математической олимпиаде участвовали 25% учащихся. Известно, что 20% девочек участвовали в олимпиаде. Найдите вероятность того, что случайно выбранный ученик участвовал в олимпиаде, если известно, что это мальчик.

10. В компьютерном классе имеются 4 одинаковых принтера. Вероятность выхода из строя каждого принтера в течение одного месяца равна 0,1. Считается, что события выхода из строя принтеров независимы. Найдите вероятность того, что в течение месяца как минимум три принтера будут работать без поломки.

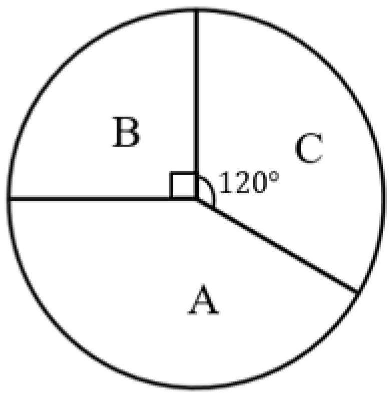
XV. Анализ данных

1. На рисунке представлены распределение пользователей интернета по регионам мира представлено в виде круговой диаграммы, а распределение пользователей интернета по регионам Европы — в виде столбчатой диаграммы.



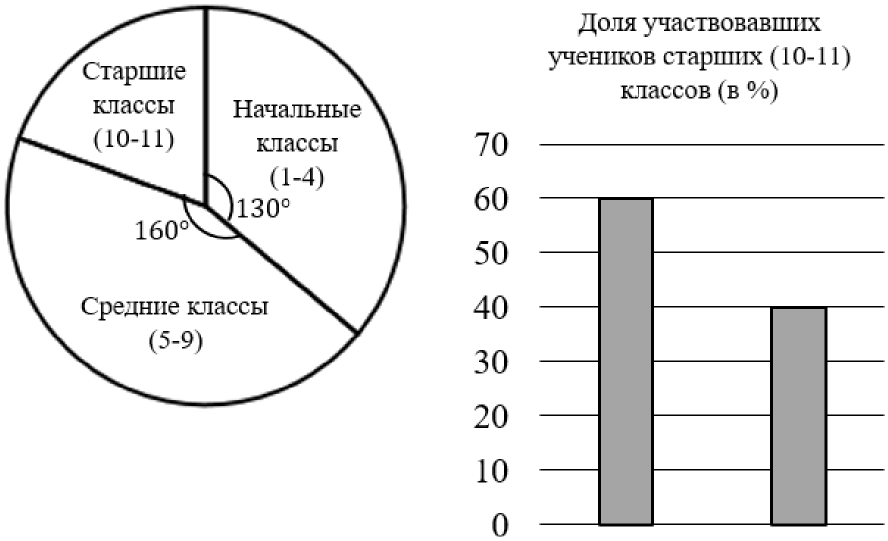
Найдите число пользователей интернета в США (в млн).

2. Смешаны три вида солёной воды A, B и C, в результате получен новый раствор.
   • Содержание соли (в %) в каждом растворе показано на столбчатой диаграмме;
   • Доли растворов A, B и C в новой смеси представлены на круговой диаграмме.



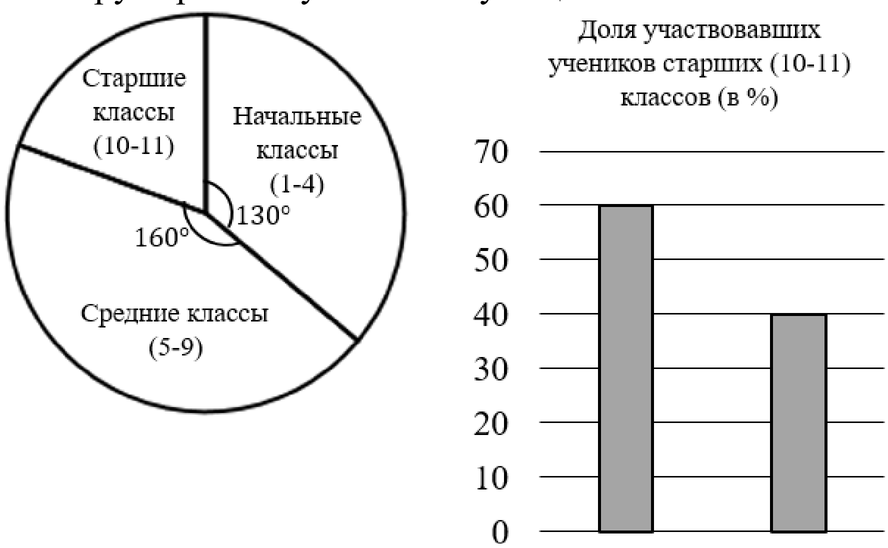
Определите долю соли (в %) в новом растворе.

3. На празднике Навруз в школе был проведён большой фестиваль.
   • Доли учащихся начальных (1–4 классы), средних (5–9 классы) и старших (10–11 классы) классов, участвовавших в мероприятии, представлены на круговой диаграмме;
   • Распределение учащихся старших классов по 10 и 11 классам (в %) показано на столбчатой диаграмме.



Определите общее количество учащихся, участвовавших в данном мероприятии, если в празднике Навруз приняли участие 56 учащихся 11 класса.

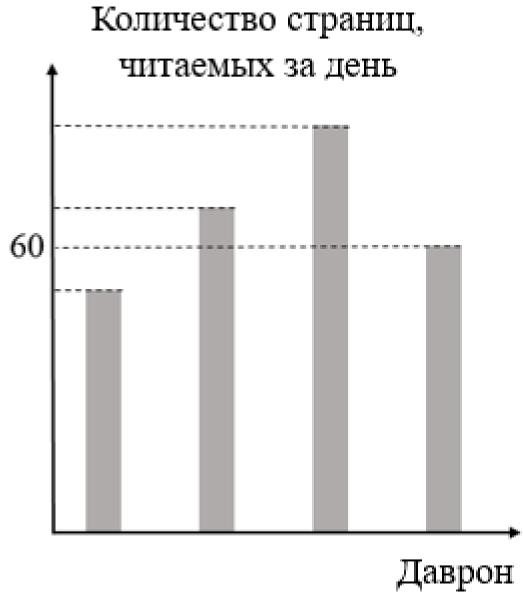
4. На празднике Навруз в школе был проведён большой фестиваль.
   - Доли учащихся начальных (1–4 классы), средних (5–9 классы) и старших (10–11 классы) классов, участвовавших в мероприятии, представлены на круговой диаграмме;
   - Распределение учащихся старших классов по 10 и 11 классам (в %) показано на столбчатой диаграмме.
   - В празднике Навруз приняли участие 84 учащихся 10 класса.



Определите среднее количество учащихся 8 класса, принявших участие в данном мероприятии, если число учащихся, участвовавших от всех средних классов, одинаково.

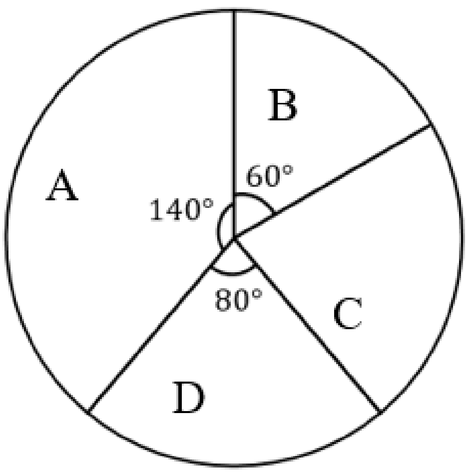
5. Азиза, Лола, Бобур и Даврон любят читать книги.
- На круговой диаграмме представлены доли количества страниц, которые Азиза, Лола и Бобур могут прочитать за один день;

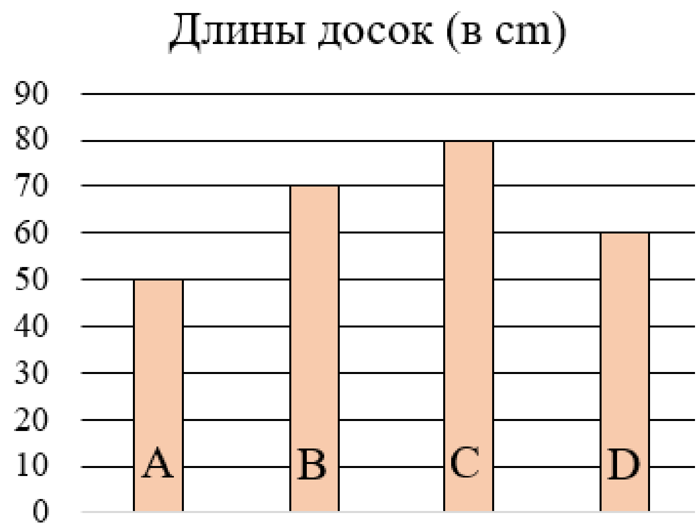
- На столбчатой диаграмме показано количество страниц, которые Азиза, Лола, Бобур и Даврон могут прочитать за один день;
- Количество страниц, прочитываемых каждым за день, является целым числом.



Определите наименьшее возможное общее количество страниц, которые Азиза, Лола, Бобур и Даврон могут прочитать за один день.

6. Для изготовления книжной полки были привезены деревянные доски четырёх разных длин.
   - Доли досок каждого вида представлены на круговой диаграмме;
   - Длины досок показаны на столбчатой диаграмме.





Определите, сколько всего досок было привезено, если общая длина всех привезённых досок составляет 112 m.

7. В магазине продаются 3 вида фруктов: бананы, апельсины и мандарины.
   - Закупочная цена за 1 kg и прибыль (в %) этих фруктов приведены в таблице.

- Количество проданных в понедельник фруктов (в kg) представлено на круговой диаграмме.

Фрукт	Закупочная цена	Прибыль (в %)
Банан	18000 сум	15%
Апельсин	19000 сум	10%
Мандарин	15000 сум	12%

Сколько всего kg фруктов было продано в понедельник, если общая прибыль в этот день от продажи фруктов составила 160800 сум?

8. В магазин привезли 3 вида мороженого: банановое, клубничное и шоколадное.
   - Количество привезённого мороженого приведено в таблице.
   - Доли каждого вида мороженого представлены на круговой диаграмме.

Мороженое	Количество
Шоколадное	$a+30$
Банановое	?
Клубничное	$a+80$

Сколько бананового мороженого было привезено в магазин?

9. Муштарий и Гули готовят блинчики. Они использовали для теста только муку, молоко и яйца.
   - На круговой диаграмме представлено распределение продуктов, использованных Муштарий при приготовлении теста для блинчиков.
   - В таблице приведено распределение продуктов в составе теста для блинчиков массой 30 gramm, приготовленного Гули.

Название продукта	Количество
Мука	10 g
Яйца	8 g
Молоко	12 g

Муштарий приготовила 450 g теста, а Гули – 480 g. После этого они объединили оба теста. Определите количество муки (в gramm) в новом замешанном тесте.

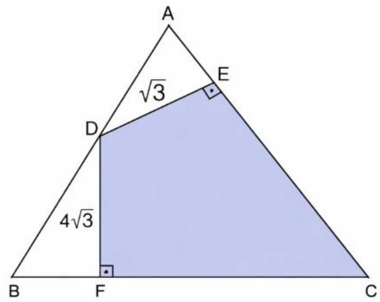
10. В библиотеку поступили 3 вида книг: художественные, научные, энциклопедии.
   • Количество поступивших книг приведено в таблице.
   • Доли каждого вида этих книг представлены на круговой диаграмме.

Вид	Количество
Энциклопедии	$a - 20$
Научные	?
Художественные	$a + 80$

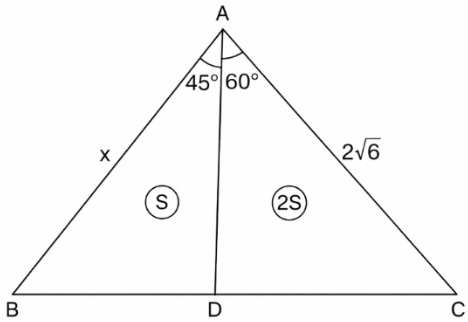
Найдите, сколько научных книг было привезено в библиотеку.

XVI. Треугольник и его элементы

1. Из точки D, расположенной на стороне AB равностороннего треугольника ABC, к сторонам BC и AC проведены перпендикуляры DF и DE соответственно. Найдите площадь (в cm^2) закрашенной области (четырехугольника $DECF$) если $DF = 4\sqrt{3}$ cm и $DE = \sqrt{3}$ cm.

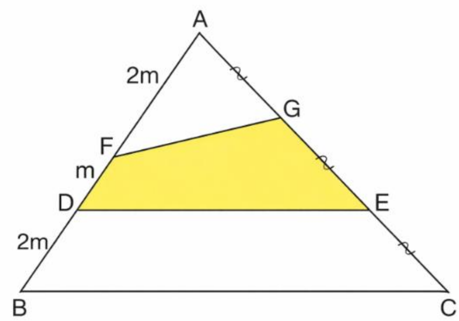


2. На стороне BC треугольника ABC взята такая точка D, что $\angle BAD = 45°$ и $\angle CAD = 60°$. Найдите длину стороны AB в cm, если $AC = 2\sqrt{6}$ cm и $2S_{ABD} = S_{ACD}$.

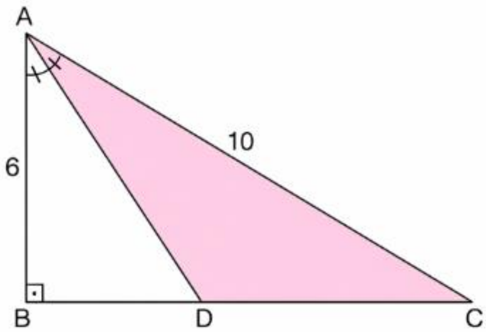


3. В треугольнике ABC:
   - Точки D и F делят сторону AB на отрезки $AF = 2m$, $FD = m$, $DB = 2m$.
   - Точки G и E делят сторону AC на равные три отрезка, то есть $AG = GE = EC$.

   Найдите площадь (в cm^2) закрашенной области (четырехугольника $DEGF$) если площадь треугольника ABC равна 30 cm^2.

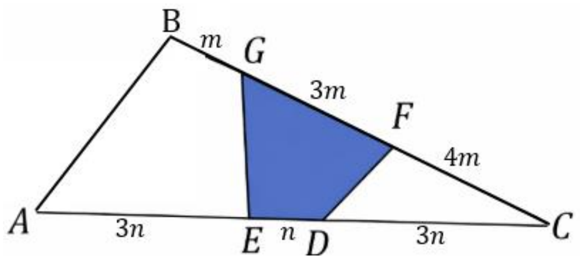


4. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AC к стороне BC проведена биссектриса AD. Найдите площадь закрашенной области (треугольника ACD) в cm^2, если $AC = 10\ cm$ и $AB = 6\ cm$.



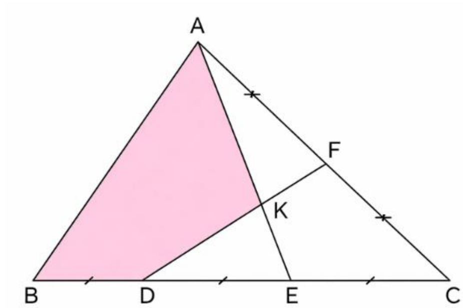
5. В треугольнике ABC:
- Точки E и D делят сторону AC в отношении $3 : 1 : 3$, то есть $AE = DC = 3ED$.
- Точки G и F делят сторону BC в отношении $1 : 3 : 4$, т.е. $GF = 3BG$ и $FC = 4BG$.

 Найдите площадь (в cm^2) закрашенной области (четырехугольника $DEGF$) если $S_{ABC} = 21\ cm^2$.

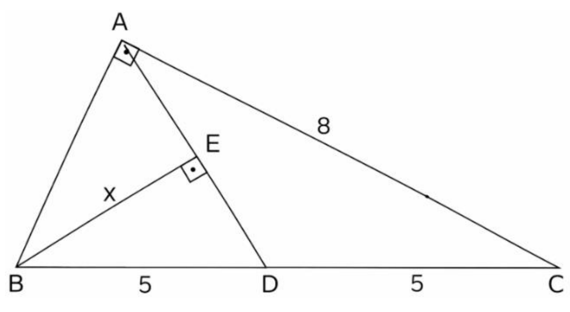


6. В треугольнике ABC:
- Точки D и E делят сторону BC на равные три отрезка, то есть $BD = DE = EC$.
- Точка F расположена в середине стороны AC.
- Отрезки DF и AE пересекаются в точке K.

 Найдите площадь (в cm^2) треугольника ABC, если плоащдь закрашенной области (четырехугольника $ABDK$) равна 60 cm^2.

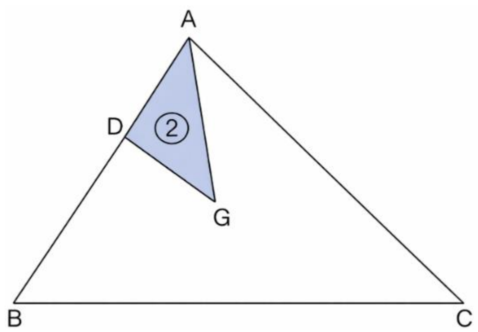


7. В прямоугольном треугольнике ABC медиана AD делит гипотенузу BC на отрезки $CD = DB = 5\ cm$. Найдите длину высоты треугольника ABD, опущенной на сторону AD (в cm), если AC = 8 cm.



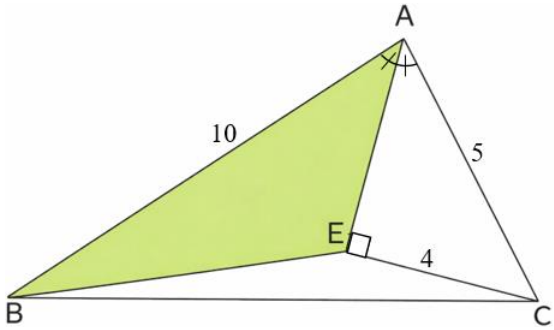
8. В треугольнике ABC:
- Точка G – точка пересечения медиан.
- Точка D делит сторону AB в отношении $1 : 3$, т.е., $3AD = BD$.
- Площадь треугольника ADG равна 2 cm^2.

 Используя данные, найдите площадь треугольника ABC в cm^2.



9. В треугольнике ABC:
   - AE – биссектриса и $AE \perp EC$.
   - $AB = 10\ cm, AC = 5\ cm$ и $EC = 4\ cm$.

   Используя данные, найдите площадь треугольника ABE в cm^2.



10. В треугольнике ABC, изображённом на рис.1, $AB = 16\ cm, AC = 12\ cm$. Этот треугольник согнули по биссектрисе AD и привели в положение, показанное на рис.2. При этом точка B перешла в точку B', а точка C лежит на AB'.

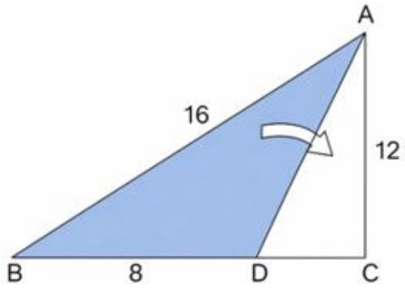


Рис.1

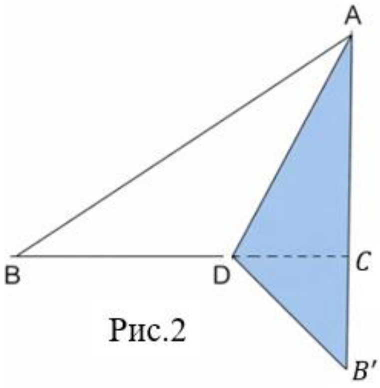
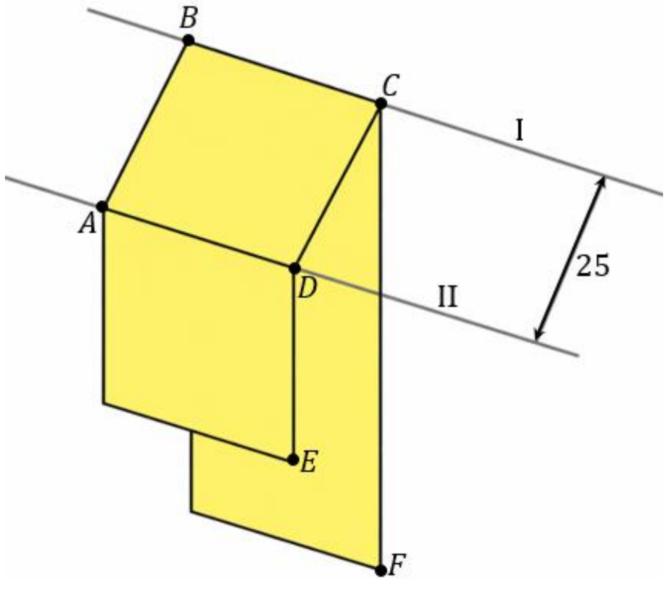


Рис.2

   Найдите периметр треугольника $CB'D$ в cm, если $BD = 8\ cm$.

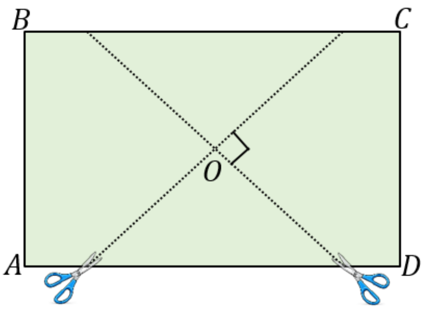
XVII. Четырехугольники и их элементы

1. Саида купила ткань прямоугольной формы для пошива платья, постирала её и повесила на взаимно параллельные верёвки. (смотрите рисунок)
   • Расстояние между I и II верёвками равно 25 dm.
   • Часть ткани, находящаяся между двумя верёвками, имеет форму квадрата.
   • Длина ткани в 4 раза больше её ширины.

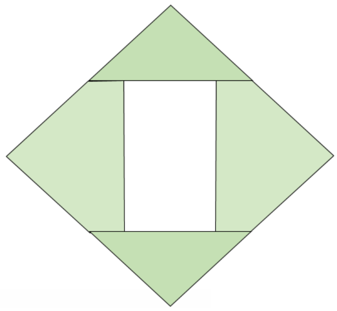


   Определите, чему равна площадь ткани, купленной Саидой, в m^2.

2. Зилола захотела изготовить декоративную композицию из бумаги прямоугольной формы. Она нашла центр тяжести бумаги и из этой точки провела две взаимно перпендикулярные линии равной длины.



Затем Зилола аккуратно разрезала бумагу по этим линиям и разделила её на несколько частей равной площади. Переставив полученные части и заново соединив их, она получила новую геометрическую фигуру. В результате в центре фигуры появилось пустое место прямоугольной формы.

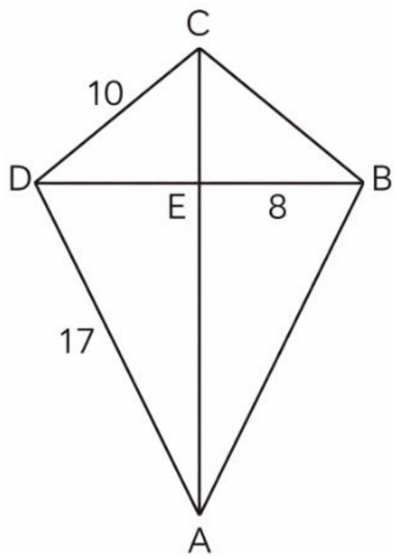


Найдите площадь центрального пустого места в cm^2 в полученной новой фигуре, если размеры исходной бумаги $AB = 20\ cm$ и $BC = 30$ cm.

3 Азизбек хочет сделать воздушного змея. Форма змея имеет вид дельтоида (четырёхугольника, состоящего из двух одинаковых треугольников), его вершины обозначены точками A, B, C, D. Опорные рейки змея — это отрезки AC и DB, которые пересекаются в точке E. В конструкции змея известны следующие размеры:

- $CD = BC = 10$ cm (верхние боковые стороны);
- $AD = 17$ cm (нижние боковые стороны);
- $EB = 8$ cm;
- $DB \perp AC$ (опорные рейки взаимно перпендикулярны).

Азизбек хочет узнать длину основной рейки AC, проходящей от центра до верхней вершины. Найдите длину диагонали AC в cm.



4. Зарина захотела изготовить декоративную композицию из бумаги в форме параллелограмма. Для этого она окрасила лицевую сторону параллелограмма длиной 12 cm и шириной 1 cm в голубой цвет, а обратную сторону — в тёмно-

оранжевый. Затем она разделила этот бумажный параллелограмм на несколько равных частей, как показано на рис.1, и после этого, согнув бумагу, получила фигуру, изображённую на рис.2.

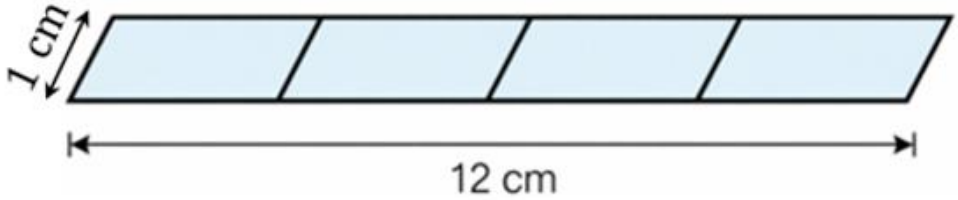


Рис.1

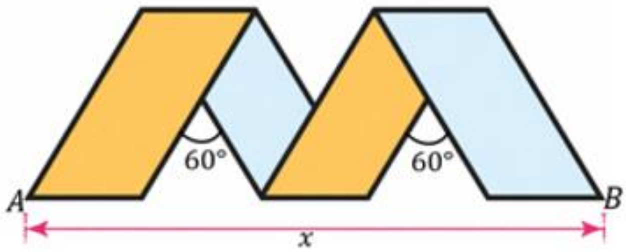
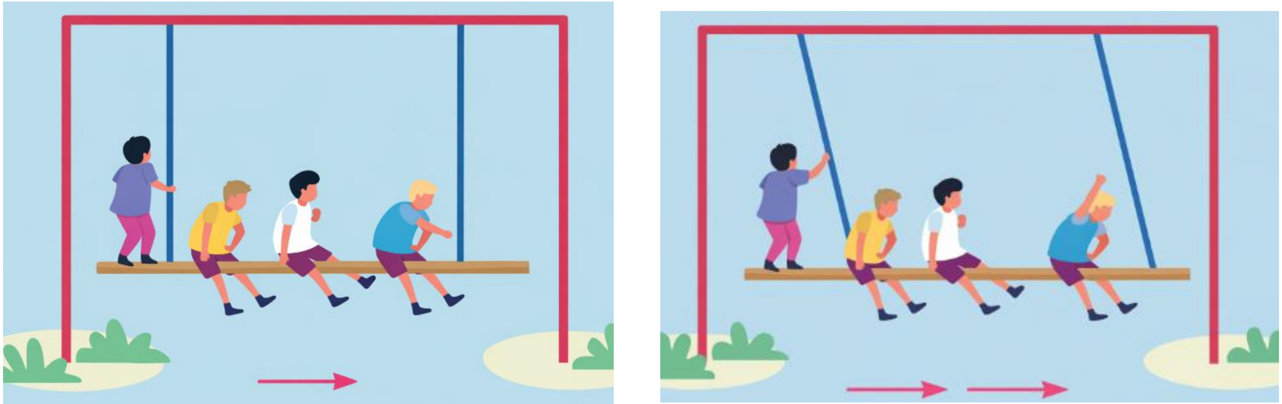


Рис.2

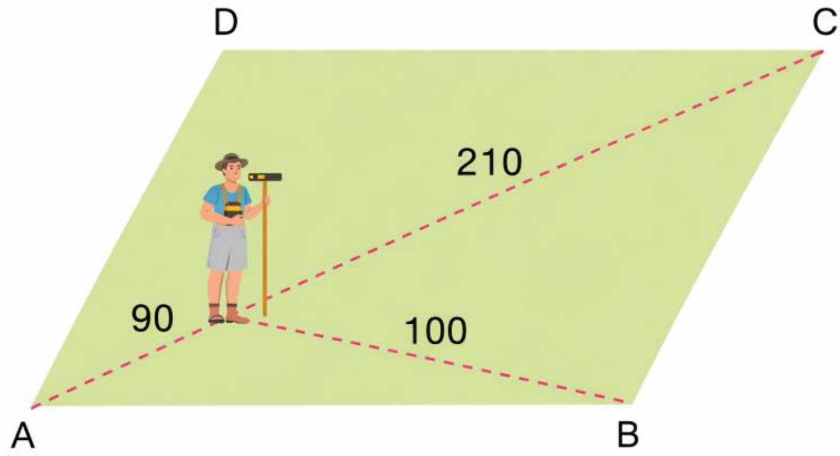
Найдите длину полученного узора, то есть $AB = x$, если величина всех указанных углов в фигуре, полученной на рис.2, равна $60°$.

5. Четверо друзей пошли на площадку покачаться на качелях. На площадке, как показано на рисунке, имеются качели прямоугольной формы. У этих качелей деревянная доска (сиденье) подвешена к металлической перекладине с помощью одной верёвки.

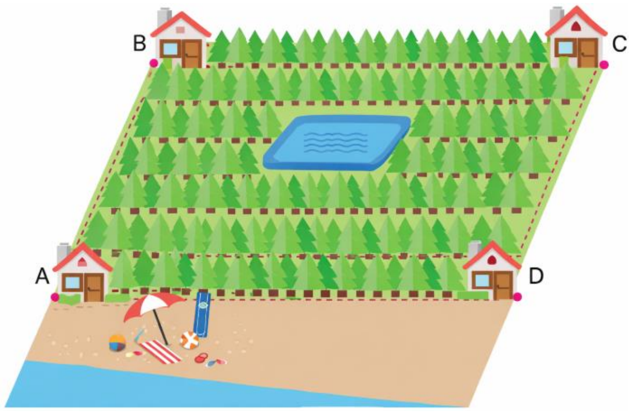


Найдите длину верёвки, на которой подвешено сиденье, если при раскачивании одним из друзей сиденье смещается в горизонтальном направлении на 40 cm и поднимается в вертикальном направлении на 10 cm.

6. Инженер сельского хозяйства, чтобы огородить забором земельный участок в форме ромба $ABCD$, измерил из одной точки на диагонали AC расстояния до точек A, B и C. Найдите периметр земельного участка, если эти расстояния соответственно равны 90 m, 100 m и 210 m.



7. Жилые дома летнего курорта, расположенного недалеко от моря, находятся в вершинах параллелограмма $ABCD$. Расстояния от домов до моря заданы следующим образом:
   - расстояние от точки A до моря равно 50 m,
   - расстояние от точки B до моря равно 160 m,
   - расстояние от точки C до моря равно 220 m.



   Найдите расстояние от дома в точке D до моря (значение x) в метрах.

8. На рис.1 изображено баскетбольное кольцо с регулируемой высотой. При угле наклона баскетбольного кольца 120° его высота от земли составляет 200 cm. Конструкция кольца имеет вид параллелограмма TAKL, при этом даны следующие сведения:
   - $|BC| = 200\ cm$
   - $|TL| = 80\ cm$
   - $\angle TLK = 120°$.

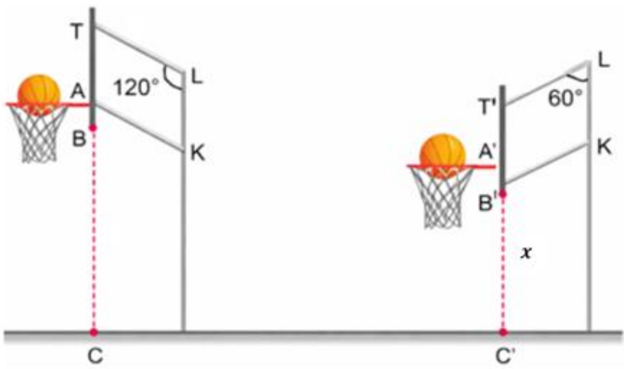
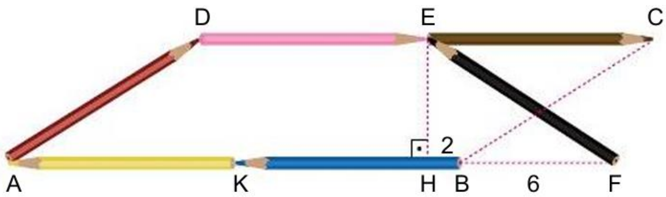


Рис.1 Рис.2

   Найдите, какой будет высота кольца от земли $|B'C'| = x$ в cm, если угол наклона кольца изменится до 60°, как показано на рис.2.

9. Жасмина с помощью 6 цветных карандашей одинаковой длины сначала составляет параллелограмм, затем, изменив положение последнего карандаша, получает фигуру, показанную на рисунке.



$ABCD$ — параллелограмм, A, K, H, B и F — лежат на одной прямой. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ в cm^2, если $|BH| = 2\ cm$, $|BF| = 6\ cm$.

10. На рисунках ниже изображено специальное механическое устройство, предназначенное для спуска грузов с высоты 29 m на уровень высоты 21 m.

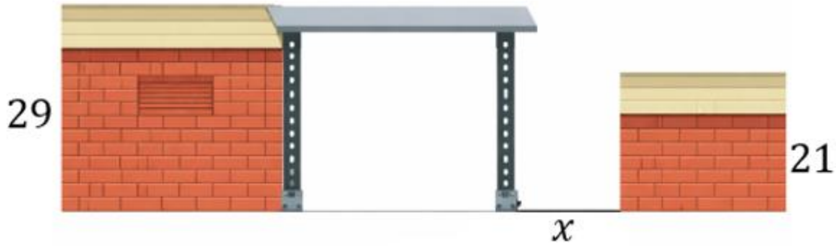


Рис.1

На рис.1 устройство показано в исходном положении. При движении платформы, как показано на рис.2, устройство принимает форму ромба.

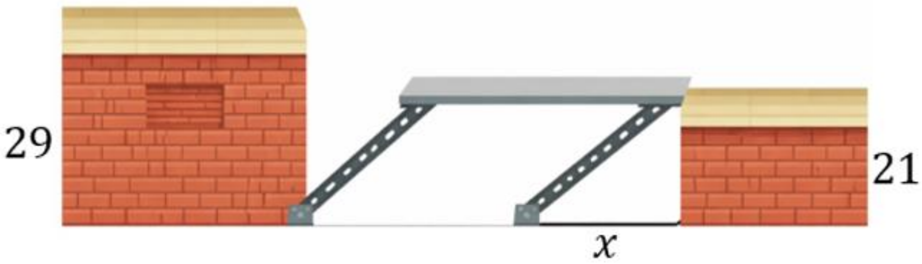
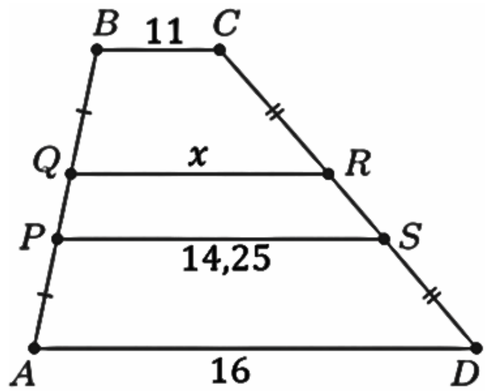


Рис.2

Найдите расстояние от платформы до уровня высоты 21 m (значение x) в метрах.

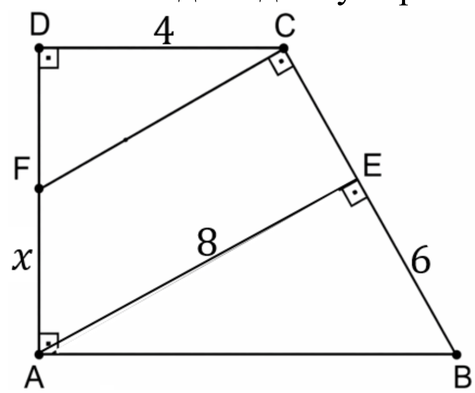
XVIII. Трапеция и ее элементы

1. На рисунке изображена трапеция $ABCD$, в которой $AD = 16$ cm, $BC = 11$ cm, $PS = 14{,}25\ cm$, $AP = BQ$ и $CR = DS$. Найдите длину отрезка QR в cm.

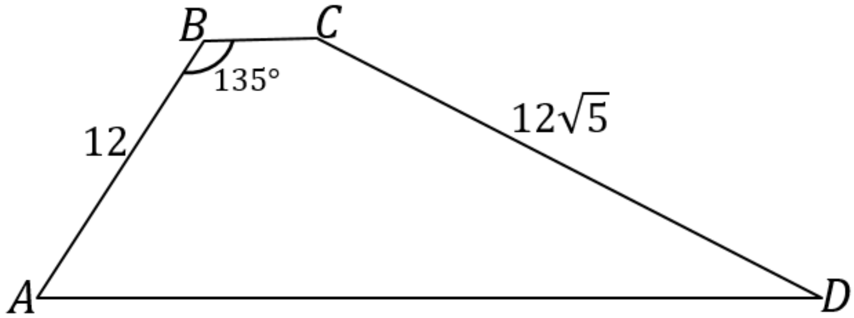


2. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и DB пересекаются в точке O. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если CD – большее основание, $DO = 3BO$, а площадь треугольника ADO равна 12 cm^2.

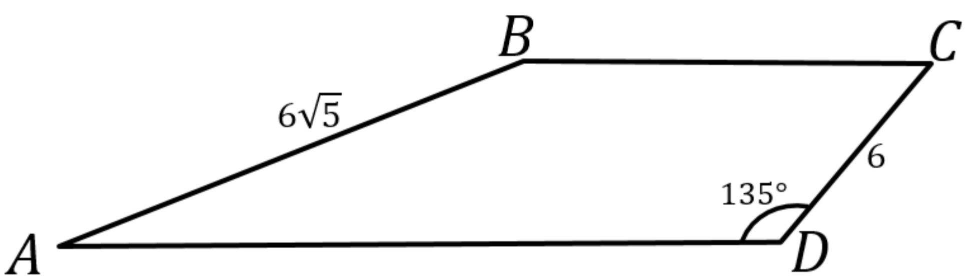
3. На рисунке изображена трапеция $ABCD$, в которой $AE = 8$ cm, $DC = 4$ cm, $EB = 6\ cm$, $FC \perp BC$ и $AE \perp BC$. Найдите длину отрезка AF в cm.



4. В трапеции $ABCD$ боковые стороны равны $AB = 12$ cm и $CD = 12\sqrt{5}$ cm. Найдите отношение длины меньшего основания к длине большего основания, если $\angle ABC = 135°$ и площадь этой трапеции равна 156 cm^2.

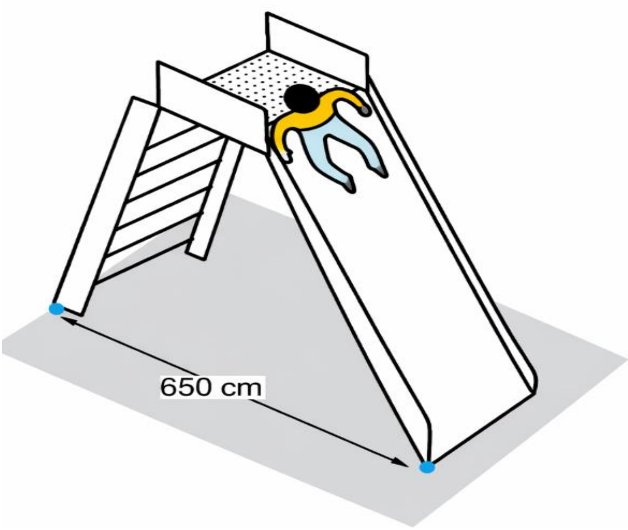


5. В трапеции $ABCD$ боковые стороны равны $AB = 6\sqrt{5}$ cm и $CD = 6$ cm. В трапеции $ABCD$ боковые стороны равны $\angle ADC = 135°$ и площадь этой трапеции равна 39 cm^2. Найдите отношение длины меньшего основания к длине большего основания.



6. Длина меньшей диагонали AC трапеции $ABCD$ с основаниями $BC = 7{,}5$ cm и $AD = 30$ cm, равна 15 cm. Найдите площадь данной трапеции, если площадь треугольника ABC равна 20 cm^2.

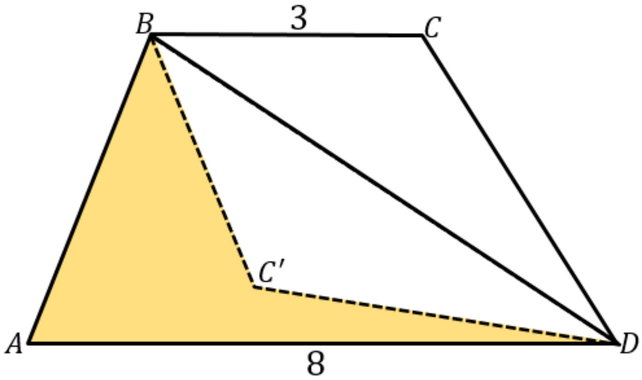
7. На рисунке ниже изображена детская горка. Горка состоит из лестницы, квадратной площадки в верхней части, расположенной параллельно земле, и спуска.



- Расстояние между концами лестницы и спуска горки равно 6,5 метра.
- С другой стороны горки есть лестница, по которой дети поднимаются. Лестница образует с землёй угол 60° и её длина равна 3 метрам.
- Сторона квадратной площадки в верхней части горки, расположенной параллельно земле, равна 50 cm.

Определите, чему равна длина спуска горки в cm.

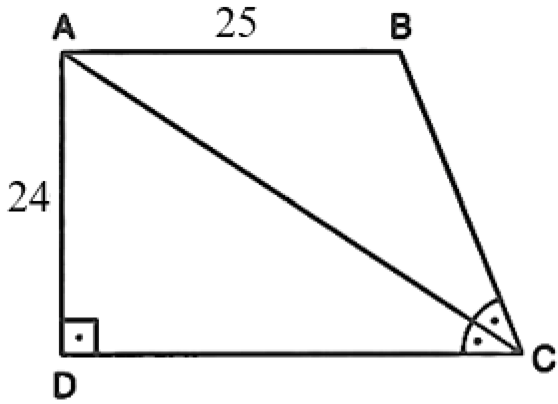
8. Солиха окрасила одну сторону бумаги в форме трапеции $ABCD$ в жёлтый цвет. Основание BC трапеции равно 3 cm, а основание AD равно 8 cm. Солиха согнула бумагу по диагонали DB, в результате чего точка C перешла в точку C'. (см. рисунок).



Найдите площадь закрашенной области (четырехугольника $ABC'D$), если площадь трапеции $ABCD$ равна 33 cm^2.

9. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагональ AC является биссектрисой $\angle BAD$ и перпендикулярна боковой стороне CD. Найдите периметр трапеции, если $\angle ABC = 120°$ и $AC = 2\sqrt{3}$ cm.

10. На рисунке изображена трапеция $ABCD$, в которой $AB = 25$ cm, $AD = 24$ cm и AC – биссектриса угла DCB. Найдите площадь трапеции..



XIX. Векторы

1. Используя свойства векторов, определите, являются ли следующие утверждения верными (В) или неверными (Н):

Утверждения	верно	неверно
I. Если $\vec{a}(-1;3;2)$ и $\vec{b}(5;2;-4)$, то координатами $\vec{a}+\vec{b}$ будут $(4;5;-2)$.		
II. Угол между векторами $\vec{a}(1;1;1)$ и $\vec{b}(1;0;0)$ равен $60°$.		
III. Координатами вектора с началом в точке $A(x_1;y_1;z_1)$ и концом в точке $B(x_2;y_2;z_2)$ называются числа $a_1=x_2-x_1$, $a_2=y_2-y_1$ и $a_1=z_2-z_1$.		

	I	II	III
Ответ:			

2. Используя свойства векторов, определите, являются ли следующие утверждения верными (В) или неверными (Н):

Утверждения	верно	неверно
I. Длина вектора $\vec{b}(3;6;2)$ равна 7.		
II. Если $\vec{a}(2;-1;3)$ и $\vec{b}(1;4;-2)$, то координатами $2\vec{a}-\vec{b}$ будут $(3;6;4)$		
III. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и числа λ выполнимо равенство $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\vec{b}$		

	I	II	III
Ответ:			

3. Используя свойства векторов, определите, являются ли следующие утверждения верными (В) или неверными (Н):

Утверждения	верно	неверно
I. Если $\vec{a}(-1; 4; -3)$ и $\mu = -3$, то координатами $\mu\vec{a}$ будут $(3; 12; -9)$		
II. Векторы $\vec{a}(1; 12; 7)$ и $\vec{b}(4; 3; 28)$ коллинеарны		
III. Длиной вектора называется длина изображающего его направленного отрезка.		

	I	II	III
Ответ:			

4. Используя свойства векторов, определите, являются ли следующие утверждения верными (В) или неверными (Н):

Утверждения	верно	неверно
I. Если $\vec{a}(4; 0; -2)$ и $\vec{b}(-2; 3; 1)$, то координатами $\vec{a} - 2\vec{b}$ будут $(8; -6; -4)$		
II. Угол между векторами $\vec{a}(-2; 1; 3)$ и $\vec{b}(3; 0; 2)$ равен $90°$.		
III. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполнимо равенство $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.		

	I	II	III
Ответ:			

5. Используя свойства векторов, определите, являются ли следующие утверждения верными (В) или неверными (Н):

Утверждения	верно	неверно
I. Длина вектора $\vec{b}(3; 6; 2)$ равна 7.		
II. Скалярное произведение векторов $\vec{a}(4; 0; -3)$ и $\vec{b}(2; 2; -1)$, равно 4.		
III. Соответствующие координаты равных векторов равны..		

	I	II	III
Ответ:			

6. Используя свойства векторов, определите, являются ли следующие утверждения верными (В) или неверными (Н):

Утверждения	верно	неверно

I. Векторы $\vec{a}(2;-1;3)$, $\vec{b}(1;2;1)$ и $\vec{c}(5;0;7)$ компланарны		
II. Если $\vec{a}(-2;1;4)$ и $\vec{b}(3;5;-2)$, то координатами $\vec{a}+\vec{b}$ будут $(1;6;2)$		
III. Вектор, координаты которого состоят из нулей, называется нулевым вектором.		

	I	II	III
Ответ:			

7. Используя свойства векторов, определите, являются ли следующие утверждения верными (В) или неверными (Н):

Утверждения	верно	неверно
I. Если $\vec{a}(5;-2;-3)$ и $\mu = 2$, то координатами $\mu\vec{a}$ будут $(10;-4;-6)$.		
II. Векторы $\vec{a}(1;2;2)$, $\vec{b}(7;-2;3)$ и $\vec{c}(8;0;5)$ компланарны		
III. Если для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $\vec{a}=\mu\vec{b}$ $(\mu \neq 0)$, то данные векторы компланарны.		

	I	II	III
Ответ:			

8. Используя свойства векторов, определите, являются ли следующие утверждения верными (В) или неверными (Н):

Утверждения	верно	неверно
I. Векторы $\vec{a}(\frac{1}{2};7;-9)$ и $\vec{b}(-\frac{1}{2};-7;9)$ взаимно противоположные векторы		
II. Если $\vec{a}(1;5;-3)$ и $\vec{b}(2;-1;4)$, то координатами $4\vec{a}-3\vec{b}$ будут $(-2;23;24)$		
III. Координатами вектора с началом в точке $A(x_1;y_1;z_1)$ и концом в точке $B(x_2;y_2;z_2)$ называются числа $a_1 = x_1 - x_2$, $a_2 = y_1 - y_2$ и $a_1 = z_1 - z_2$		

	I	II	III
Ответ:			

9. Используя свойства векторов, определите, являются ли следующие утверждения верными (В) или неверными (Н):

Утверждения	верно	неверно
I. Угол между векторами $\vec{a}(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$ и $\vec{b}(1; 0; 0)$ равен 30°.		
II. Если $\vec{a}(-8; 20; -16)$ и $\mu = -\frac{1}{4}$, то координатами $\mu\vec{a}$ будут $(2; 5; -4)$		
III. В пространстве вектором называется направленный отрезок.		

	I	II	III
Ответ:			

10. Используя свойства векторов, определите, являются ли следующие утверждения верными (В) или неверными (Н):

Утверждения	верно	неверно
I. Если $\vec{a}(8; -3; 0)$ и $\vec{b}(-1; 4; 6)$, то координатами $\vec{a} + \vec{b}$ будут $(7; 2; 6)$		
II. Длина вектора $\vec{c}(5; 9; 2)$ равна 10.		
III. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется произведение длин этих векторов на синус угла между ними.		

	I	II	III
Ответ:			

XX. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

1. Угол между перпендикуляром и наклонной равен 30°. Найдите длину наклонной (в cm), если длина перпендикуляра равна $5\sqrt{3}$ cm.

2. Угол между перпендикуляром и наклонной равен 60°. Найдите длину перпендикуляра (cm), если длина наклонной равна 14 cm.

3. Найдите длину проекции наклонной на плоскость (cm), если наклонная, опущенная из одной точки на плоскость, равна 26 cm, а перпендикуляр 10 cm.

4. Найдите длину перпендикуляра (cm), если наклонная, опущенная из одной точки на плоскость, равна 17 cm, а проекция наклонной на плоскость равна 8 cm.

5. Угол между перпендикуляром и наклонной равен 45°. Найдите длину перпендикуляра (cm), если длина наклонной равна $8\sqrt{2}$ cm.

6. Из одной точки к плоскости опущена наклонная. Найдите длину перпендикуляра (в cm), если перпендикуляр равен 9 cm, а проекция наклонной на плоскость равна 12 cm.

7. Из одной точки пространства к плоскости проведены две наклонные длиной 26 cm и 25 cm. Найдите проекцию второй наклонной (cm), если проекция первой наклонной на плоскость равна 10 cm.

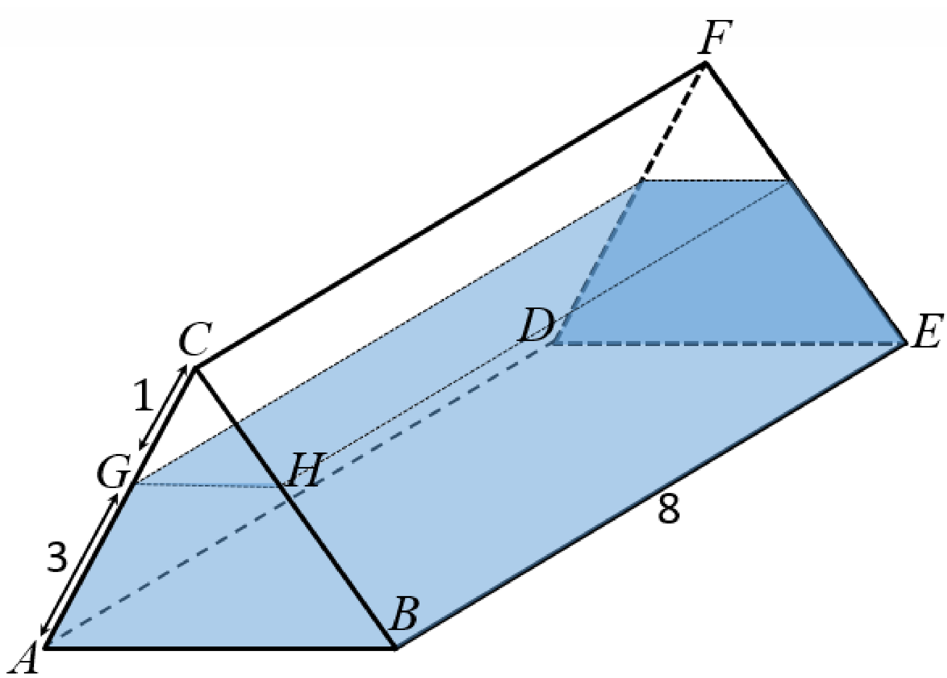
8. Из одной точки пространства к плоскости проведены две наклонные длиной 17 cm и 10 cm. Найдите проекцию первой наклонной (cm), если проекция второй наклонной на плоскость равна 6 cm.

9. Найдите расстояние от точки $A(3; 6; -2)$ до плоскости $12x - 3y + 4z + 3 = 0$.

10. Найти расстояние между плоскостями $2x - y + 2z - 2 = 0$ и $2x - y + 2z + 4 = 0$

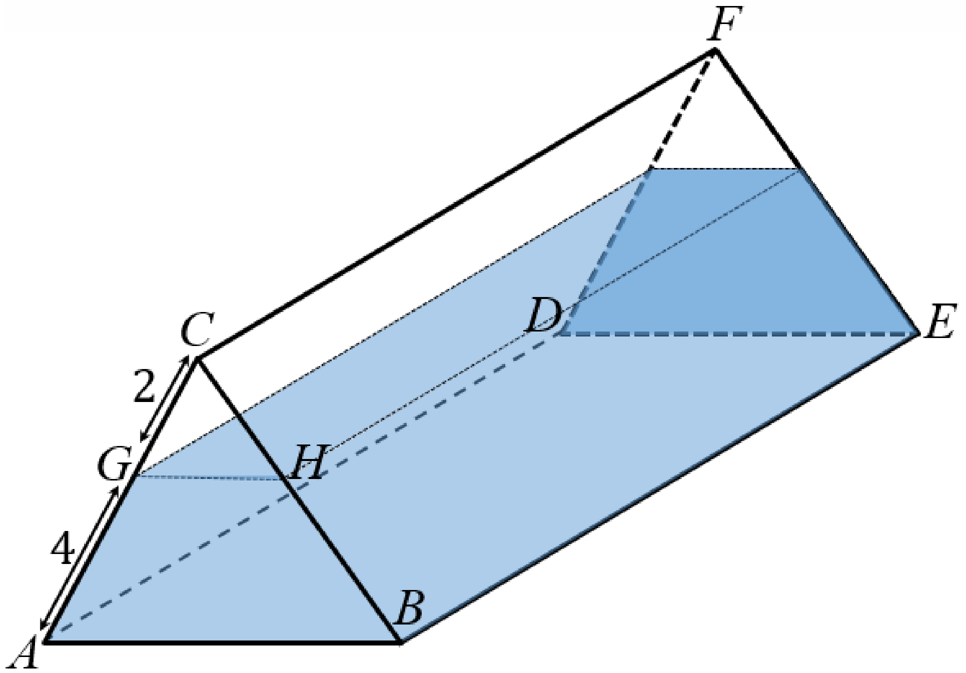
XXI. Призмы

1. На рисунке изображена прямая призма, основанием которой является равносторонний треугольник. Призма заполнена водой до плоскости GH.



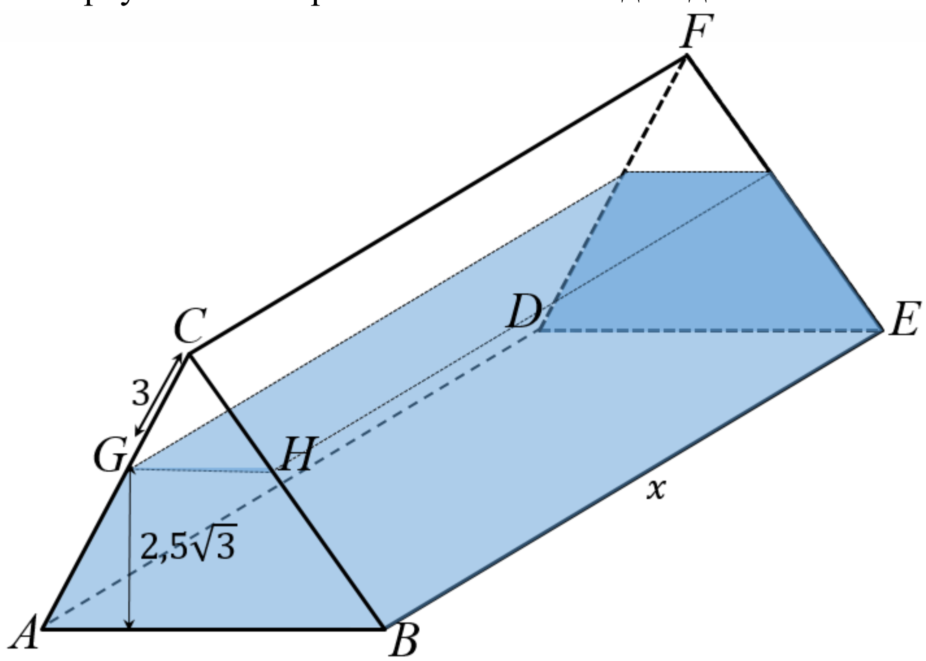
Треугольник ABC в призме является равносторонним, при этом $GH \parallel AB$. Найдите объём воды внутри призмы, если AG = 3 cm, CG = 1 cm и CF = 8 cm.

2. На рисунке изображена прямая призма, основанием которой является равносторонний треугольник. Призма заполнена водой до плоскости GH.



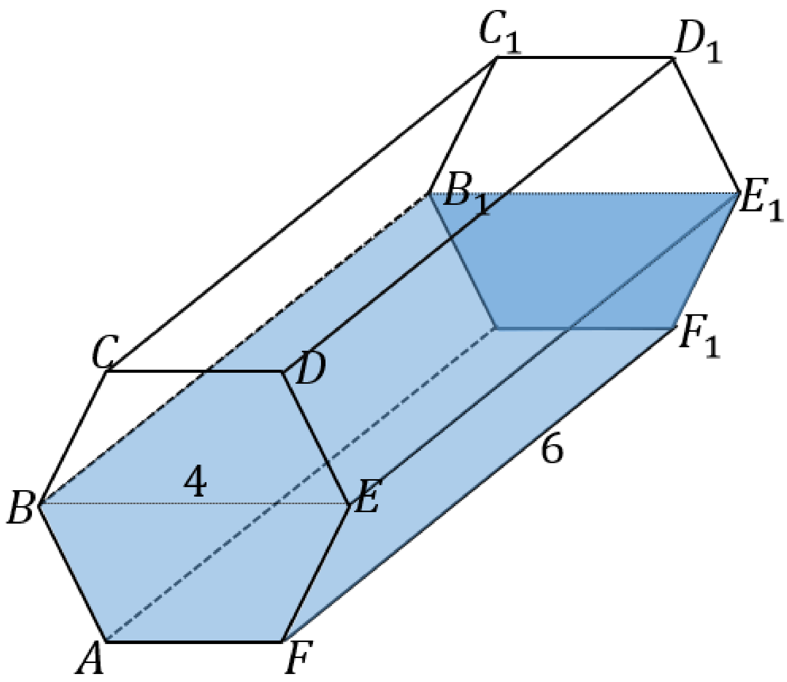
В призме треугольник ABC является равносторонним, $GH \parallel AB$. Найдите длину CF, если $AG = 4\,cm, CG = 2\,cm$ и при укладывании этой призмы на грань треугольника ABC уровень воды внутри призмы равен 8 cm.

3. На рисунке изображена прямая призма, основанием которой является равносторонний треугольник. Призма заполнена водой до плоскости GH.



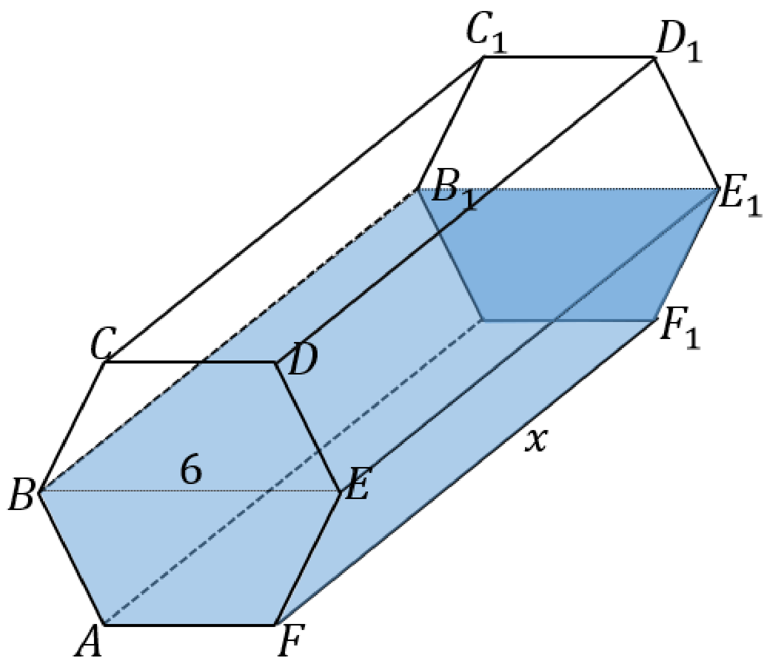
Треугольник ABC в призме равносторонний, $GH \parallel AB$, а уровень воды внутри призмы равен $\frac{5\sqrt{3}}{2}\,cm$. Найдите длину CF, если $CG = 3\,cm$ и при укладывании этой призмы на грань треугольника ABC уровень воды внутри призмы равен 11 cm.

4. На рисунке изображена прямая призма, основанием которой является правильный шестиугольник. Призма заполнена водой до плоскости BE.



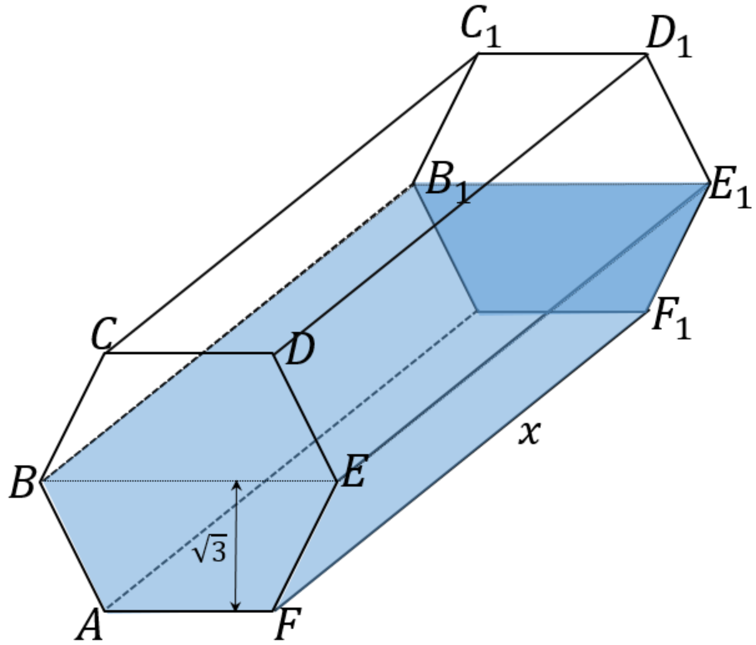
Шестиугольник $ABCDEF$ в призме является правильным, при этом $BE \parallel AF$. Найдите объём воды в призме, если $BE = 4\ cm$, $FF_1 = 6\ cm$.

5. На рисунке изображена прямая призма, основанием которой является правильный шестиугольник. Призма заполнена водой до плоскости BE.



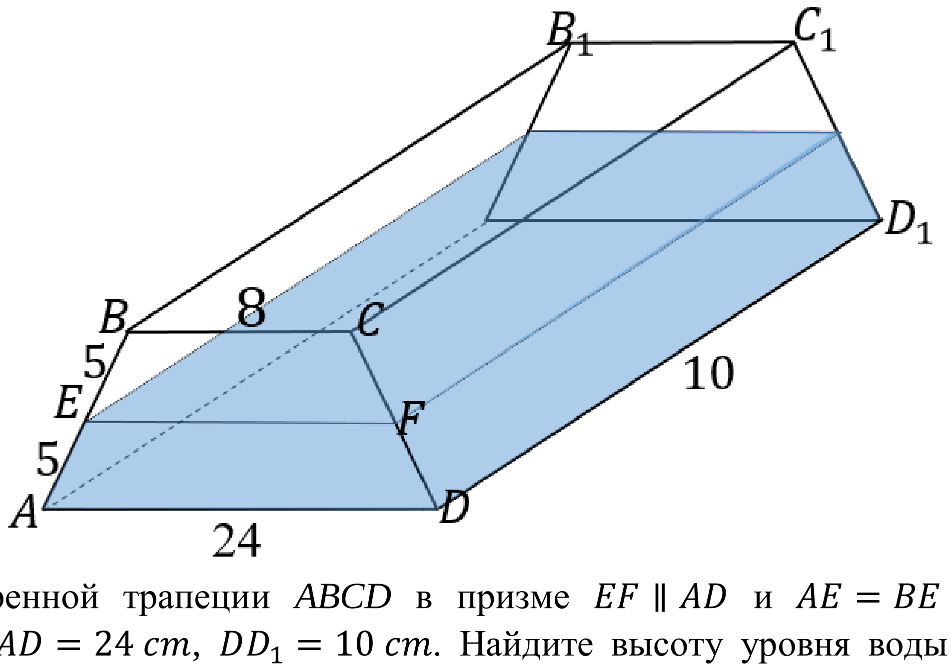
Шестиугольник $ABCDEF$ в призме является правильным, при этом $BE \parallel AF$ и $BE = 6\ cm$. Найдите длину FF_1, если при укладывании этой призмы на грань шестиугольника $ABCDEF$ уровень воды внутри призмы равен 4 cm.

6. На рисунке изображена прямая призма, основанием которой является правильный шестиугольник. Призма заполнена водой до плоскости BE.



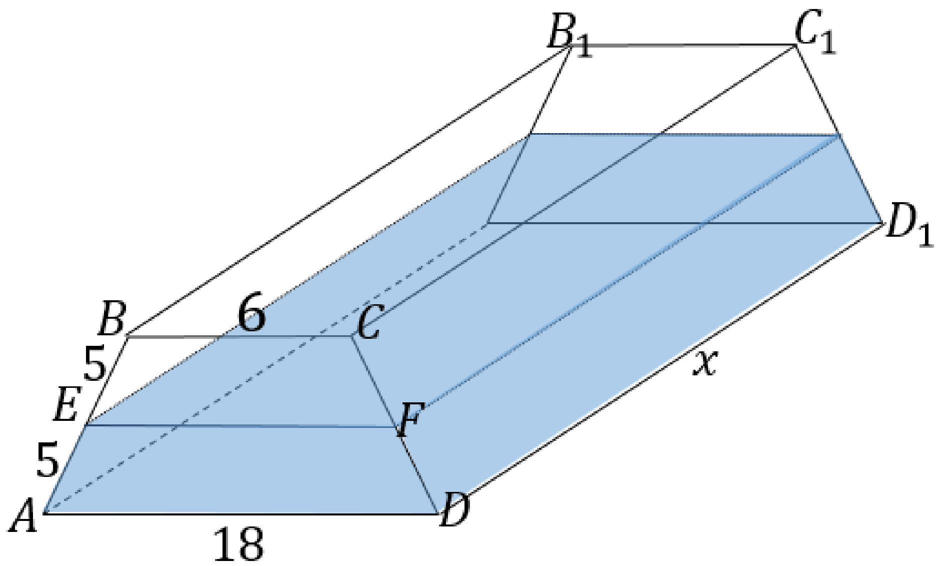
Шестиугольник ABCDEF в призме правильный, $BE \parallel AF$, а уровень воды внутри призмы равен $\sqrt{3}\ cm$. Найдите длину FF_1, если при укладывании этой призмы на грань шестиугольника $ABCDEF$ уровень воды внутри призмы равен 5 cm.

7. На рисунке изображена прямая призма, основанием которой является равнобедренная трапеция. Призма заполнена водой до плоскости EF.



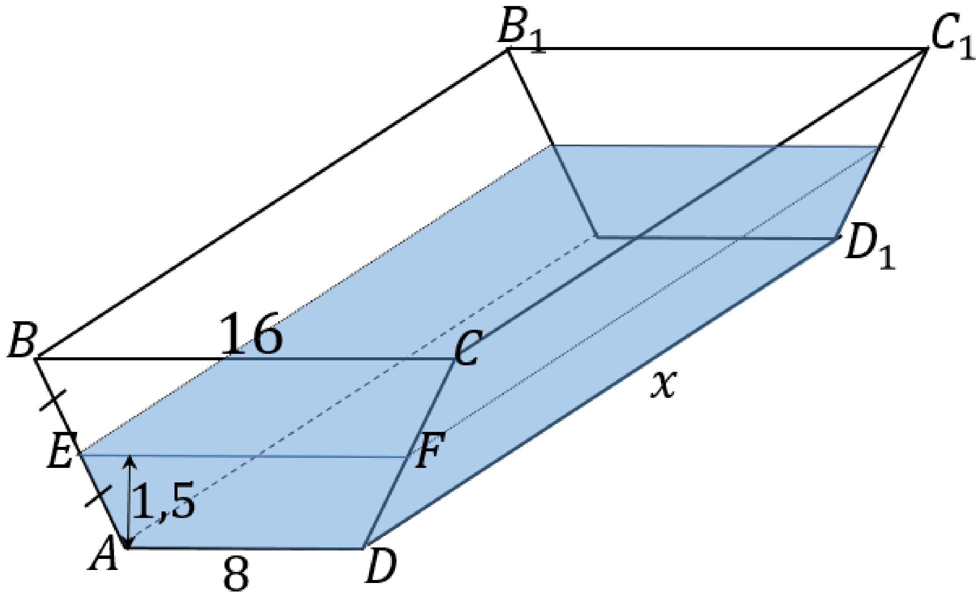
В равнобедренной трапеции $ABCD$ в призме $EF \parallel AD$ и $AE = BE = 5\ cm$, $BC = 8\ cm$, $AD = 24\ cm$, $DD_1 = 10\ cm$. Найдите высоту уровня воды внутри призмы при укладывании этой призмы на грань трапеции $ABCD$.

8. На рисунке изображена прямая призма, основанием которой является равнобедренная трапеция. Призма заполнена водой до плоскости EF.



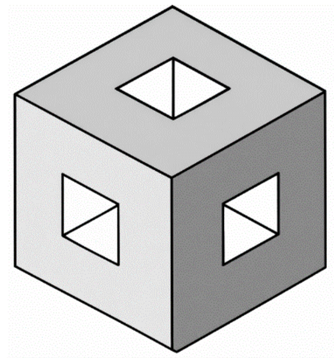
В равнобедренной трапеции $ABCD$ в призме $EF \parallel AD$ и $AE = BE = 5\, cm$, $BC = 6\, cm$, $AD = 18\, cm$. Найдите длину DD_1, если при укладывании этой призмы на грань трапеции $ABCD$ уровень воды внутри призмы равен 5 cm.

9. На рисунке изображена прямая призма, основанием которой является равнобедренная трапеция. Призма заполнена водой до плоскости EF.



В равнобедренной трапеции $ABCD$ в призме $EF \parallel AD$ и уровень воды внутри призмы равен $1{,}5\, cm$. $AE = BE$, $BC = 16\, cm$, $AD = 8\, cm$. Найдите длину DD_1, если при укладывании этой призмы на грань трапеции $ABCD$ уровень воды внутри призмы равен 5 cm.

10. В каждой грани алюминиевого куба с ребром 6 cm проделаны сквозные отверстия, поперечное сечение которых представляет собой квадрат стороной 3 cm (см. рисунок). Найдите массу оставшейся части куба, если удельная плотность алюминия составляет 2,7 g/cm^3. ($m = \rho \cdot V$)



XXII. Цилиндр

1. Анвар решил упаковать подарок для своего младшего брата, имеющий форму прямого цилиндра. Для этого он использовал обёрточную бумагу прямоугольной формы шириной 20 cm и длиной $20\pi - 4$ cm. Анвар планировал, согнув бумагу, получить цилиндр без оснований, полностью покрывающий боковую поверхность подарка. Однако при оборачивании он заметил, что между подарком и бумагой остаётся зазор (см. рисунок 1).

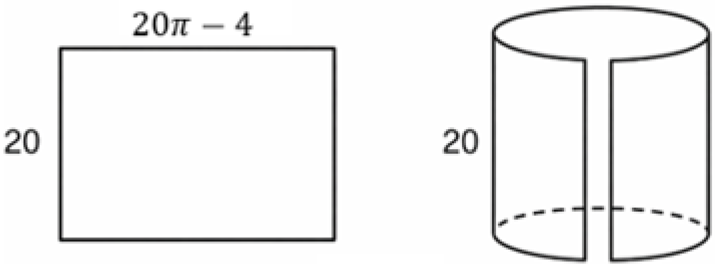


Рис.1

Анвар, чтобы закрыть образовавшийся зазор, использовал прямоугольную ленту шириной 5 cm и высотой 20 cm. С каждой стороны ленты по 0,5 cm было приклеено к обёрточной бумаге (см. рисунок 2).

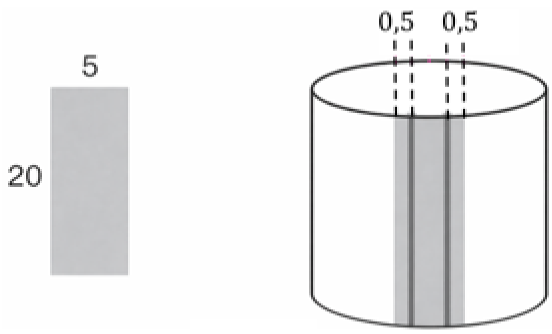
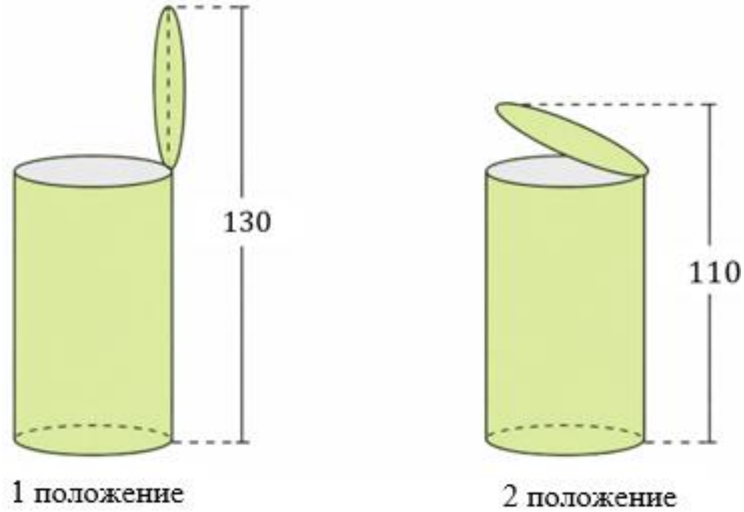


Рис.2

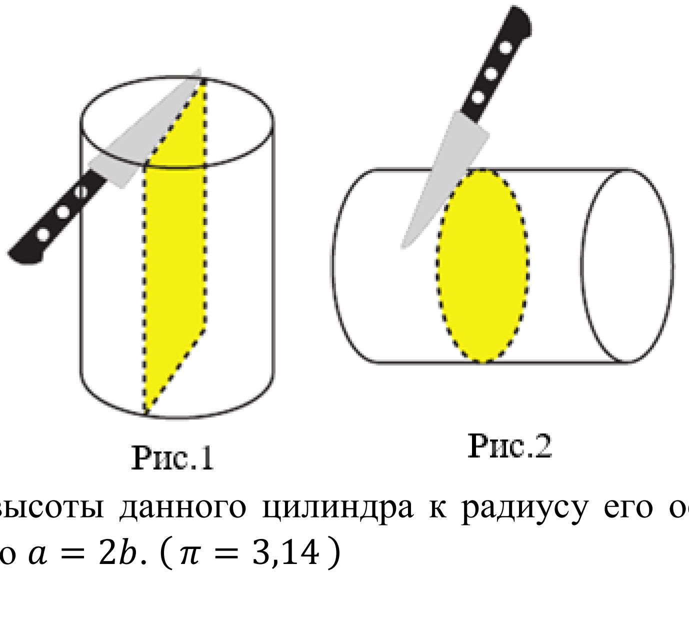
Используя данные условия, найдите объём цилиндра (в cm^3), образованного упакованным подарком. ($\pi = 3{,}14$)

2. В парке установлены мусорные урны одинакового размера, имеющие форму цилиндра. Урны размещены на ровной поверхности, а их крышки могут открываться и закрываться. В результате наблюдений установлено:
- При открытии крышки на 90° общая высота урны составляет 130 cm.
- При открытии крышки на 30° общая высота урны составляет 110 cm.



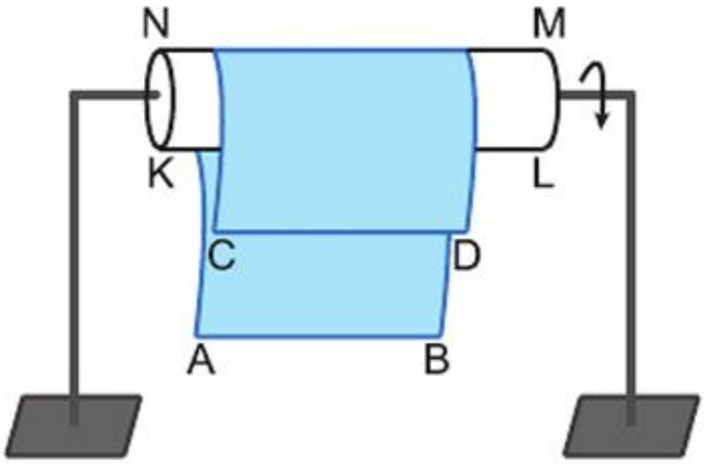
Крышка урны представляет собой жёсткую пластину круговой формы, закреплённую на краю урны. Используя данные, найдите объём урны (в cm^3) в закрытом состоянии. ($\pi = 3{,}14$)

3. Сыр в форме прямого кругового цилиндра разрезается на две равные части одним из способов, показанных на рисунках 1 и 2. Разрез выполняется с помощью поперечного сечения. Если сыр:
- разрезать, как показано на рис.1, то площадь полученного жёлтого прямоугольного сечения равна $a\ cm^2$,
- разрезать, как показано на рис.2, то площадь полученного жёлтого кругового сечения равна $b\ cm^2$.



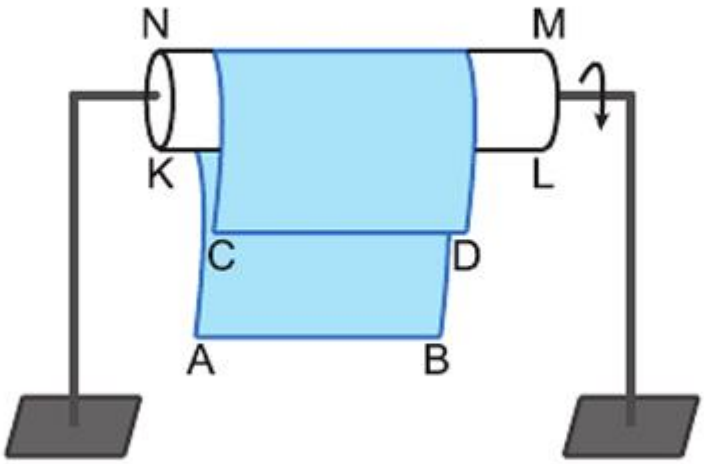
Найдите отношение высоты данного цилиндра к радиусу его основания, если выполняется равенство $a = 2b$. ($\pi = 3{,}14$)

4. На рисунке прямоугольное полотно *ABCD* натянуто на цилиндрическую часть сушильного устройства, имеющую форму прямого кругового цилиндра. Цилиндр может свободно вращаться вокруг своей оси, а расстояние между точками N и M, соответствующими концам оси цилиндра, равно 98 cm.



При повороте цилиндра вокруг его центра на 30° в направлении, указанном на рисунке, сторона *CD* полотна приближается к поверхности земли на $\frac{5\pi}{2}$ cm. Если сторона *CD* прямоугольного полотна *ABCD* параллельна поверхности земли, найдите объём цилиндра сушильного устройства (в cm^3). ($\pi = \frac{22}{7}$ deb oling)

5. На рисунке прямоугольное полотно *ABCD* натянуто на цилиндрическую часть сушильного устройства, имеющую форму прямого кругового цилиндра. Цилиндр может свободно вращаться вокруг своей оси, а расстояние между точками N и M, соответствующими концам оси цилиндра, равно 105 cm.



Объём цилиндра сушильного устройства равен $42000\pi\ cm^3$. Найдите, на сколько сантиметров сторона *CD* приблизится к поверхности земли при повороте цилиндра вокруг его центра на 30° в направлении, указанном на рисунке, если сторона *CD* прямоугольного полотна *ABCD* параллельна поверхности земли. ($\pi = \frac{22}{7}$)

6. На рисунке 1 изображён открытый сверху сосуд, имеющий форму прямого цилиндра. Внутрь этого сосуда помещена свеча так, что её основание касается дна сосуда. Радиус основания сосуда равен 4 cm, а его высота - 6 cm. Свеча горит в течение некоторого времени и принимает форму, показанную на рисунке 2, при этом её высота становится равной половине высоты сосуда.

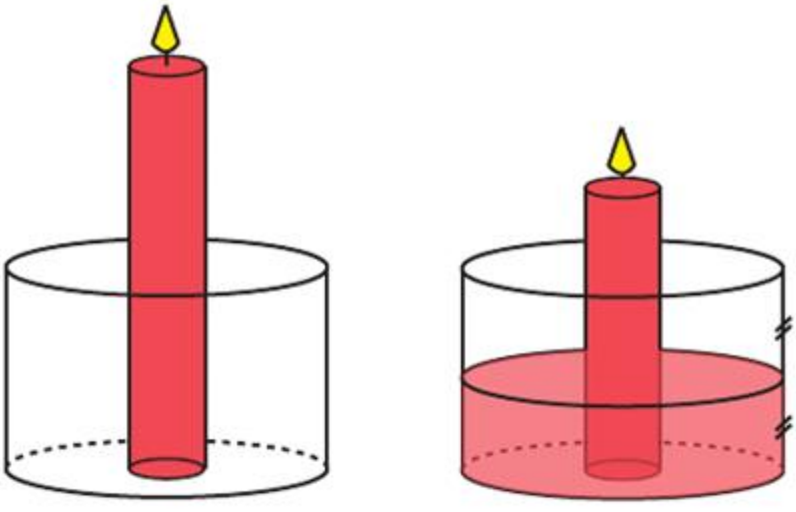


Рис.1 Рис.2

Найдите радиус свечи, если объём расплавившейся части свечи равен $36\pi\ cm^3$.

7. Кондитер выпекает бенто-торты, имеющие форму прямого цилиндра. Стоимость тортов он определяет в зависимости от их массы. Однако, не имея весов, он поступил следующим образом:
- разрезал торт пополам плоскостью, проходящей через центр, и получил сечение квадратной формы;
- установил, что сторона квадрата равна 20 cm.

Найдите массу бенто-торта, если известно, что средняя плотность торта равна 0,8 g/cm^3. ($\pi = 3{,}14$ и $m = \rho \cdot V$).

8. В школьной столовой во время обеда установлен тефал-термос (электронное устройство, которое может нагревать воду и поддерживать её температуру), чтобы учащиеся могли пить чай или кофе. Часть термоса для хранения воды имеет форму прямого кругового цилиндра с радиусом основания 6 dm и высотой 8 dm (см. рисунок). Стаканы, которыми пользуются учащиеся, также имеют форму прямого кругового цилиндра: диаметр основания каждого стакана равен 6 cm, а высота - 10 cm. Используя эти данные, определите, сколько учащихся можно полностью обеспечить напитком из одного такого термоса.

9. На заводе был изготовлен металлический бак цилиндрической формы. Высота бака равна 16 dm, радиус основания - 10 dm. Для проверки внутренней структуры инженеры разрезали бак плоскостью, параллельной его оси. В результате полученное сечение оказалось квадратом. Используя эти данные, найдите расстояние от плоскости сечения до оси бака (в dm).

10. На заводе производятся консервные банки в форме прямого кругового цилиндра. На боковую поверхность каждой банки наклеивается бумажная этикетка. Этикетка полностью покрывает боковую поверхность цилиндра и в развёрнутом виде имеет форму квадрата. Известно, что площадь этой этикетки равна 225 cm^2. Используя эти данные, найдите объём консервной банки (в cm^3).

XXIII. Пирамиды

1. Площади оснований правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равны 242 cm^2 и 18 cm^2, а высота боковой грани (апофема) равна $2\sqrt{17}$ cm. Найдите объём усечённой пирамиды (в cm^3).

2. Сторона большего основания правильной усечённой четырёхугольной пирамиды равна 10 cm, а сторона меньшего основания равна 6 cm. Найдите её объём (в cm^3), если известно, что боковое ребро усечённой пирамиды равно $2\sqrt{10}$ cm.

3. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник, катеты которого равны 6 cm и 8 cm. Найдите её объём (в cm^3), если каждое боковое ребро пирамиды равно 13 cm.

4. Стороны оснований правильной усечённой четырёхугольной пирамиды равны 6 cm и 18 cm. Найдите её полную поверхность (в cm^3), если высота равна 8 cm.

5. Стороны оснований правильной усечённой четырёхугольной пирамиды равны 6 cm и 14 cm. Найдите её объём (cm^3), если высота боковой грани этой усечённой пирамиды равна 5 cm.

6. Ребро правильной треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол 30°. Найдите объём пирамиды (в cm^3), если сторона основания равна $2\sqrt{3}$ cm.

7. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6 cm. Найдите высоту пирамиды (cm), если площадь её боковой поверхности в 2 раза больше площади основания.

8. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 10 cm, а площадь боковой поверхности равна 144 cm^2. Найдите меньшее из возможных значений длины апофемы этой пирамиды (cm).

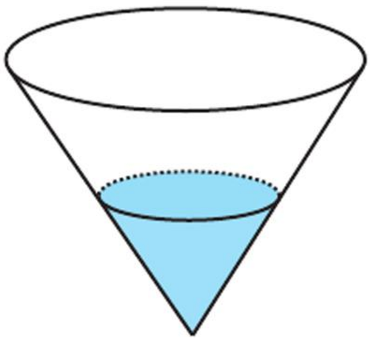
9. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 12 cm. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды (в cm^2), если площадь одной боковой грани равна площади сечения, проведённого через диаметр основания.

10. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 13 cm, а площадь боковой поверхности равна 180 cm^2. Найдите меньшее из возможных значений длины стороны основания этой пирамиды (cm).

XXIV. Конус

1. Найдите объём тела (в cm^3), полученного вращением прямоугольного треугольника с катетами 6 cm и 8 cm вокруг его гипотенузы. (примите $\pi = 3$).

2. На рисунке ниже изображён сосуд в форме конуса, в который налита вода до половины высоты сосуда.



Найдите объём заполненной водой части сосуда в cm^3, если если объём незаполненной (без воды) части равен 28 cm^3.

3. Найдите объём усечённого конуса в cm^3, если длины окружностей его оснований равны 12π cm и 20π cm, а площадь осевого сечения равна 128 cm^2. (примите $\pi = 3$).

4. Осевое сечение конуса является равносторонним треугольником. Найдите диаметр основания конуса в cm, если полная поверхность конуса равна $108\pi\ cm^2$.

5. Найдите объем тела в cm^3, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = |x - 2|$, $x = -4$, $x = 0$ и $y = 0$ (примите $\pi = 3$).

6. Боковая поверхность конуса равна 144π. Найдите площадь боковой поверхности в cm^2 усечённого конуса, полученного сечением этого конуса плоскостью, перпендикулярной его высоте и проходящей через середину высоты (примите $\pi = 3$).

7. Конус, изображённый на рис.1, уложили на образующую AT его боковой поверхности, как показано на рис.2.

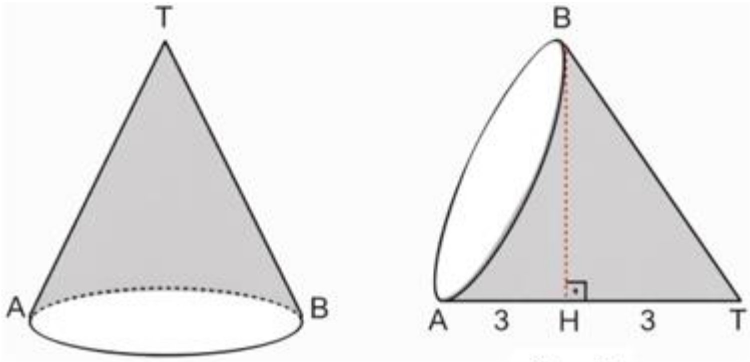


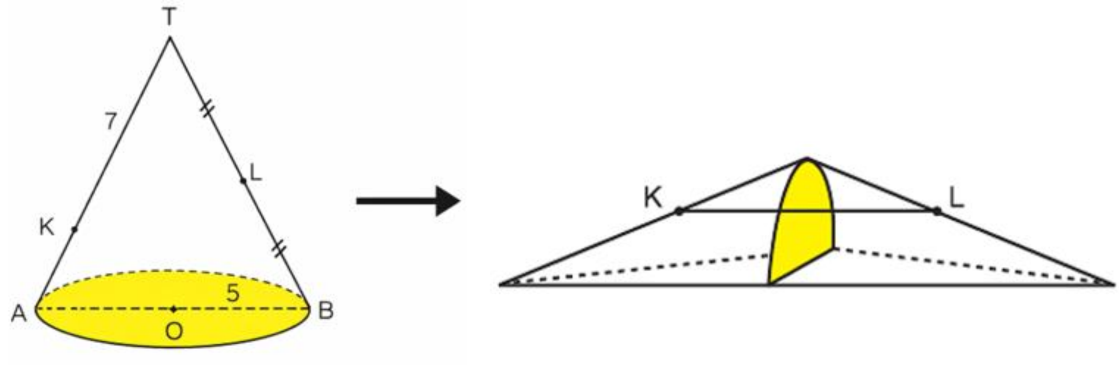
Рис.1 Рис.2

В результате высота BH, опущенная из точки B, разделила сторону AT на отрезки AH и HT длиной 3 cm. Найдите площадь боковой поверхности конуса в cm^2. (примите $\pi = 3$).

8. Найдите объём усечённого конуса в cm^3, полученного сечением конуса с радиусом основания 6 cm плоскостью, параллельной основанию и делящей его высоту, считая от основания, на отрезки длиной 8 cm и 4 cm (примите $\pi = 3$).

9. Найдите объём усечённого конуса в cm^3, если его образующая равна 10 cm и наклонена к плоскости основания под углом 60°, а диагональ осевого сечения делит этот угол пополам (примите $\pi = 3$).

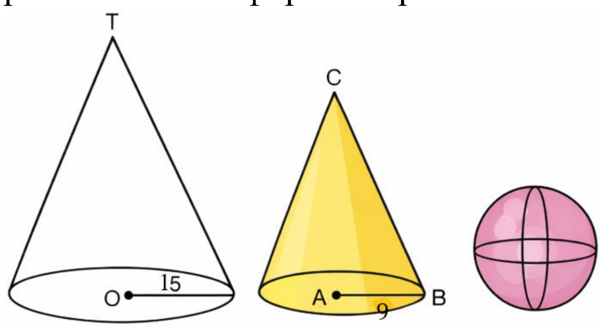
10. На рисунке изображён конус с радиусом основания 5 cm. Сечение конуса ATB является равносторонним треугольником, и на его боковых сторонах AT и BT соответственно взяты точки K и L так, что $KT = 7\,cm$ и $TL = LB$. Конус разрезается плоскостью, проходящей через вершину T и точку O (центр основания). В результате конус делится на две равные части. При объединении этих частей получается тело, показанное ниже:



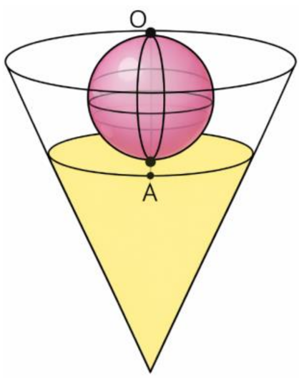
Найдите расстояние в cm между точками K и L в полученном теле.

XV. Комбинация геометрических тел

1. У Анвара есть 3 игрушки:
   - первая – пустая игрушечная ёмкость в форме конуса, радиус её основания равен 15 cm;
   - вторая — тоже игрушка в форме конуса, полностью заполненная, жёлтого цвета; радиус основания этого малого конуса равен 9 cm, а высота — 27 cm;
   - третья игрушка — розовый мяч в форме шара.



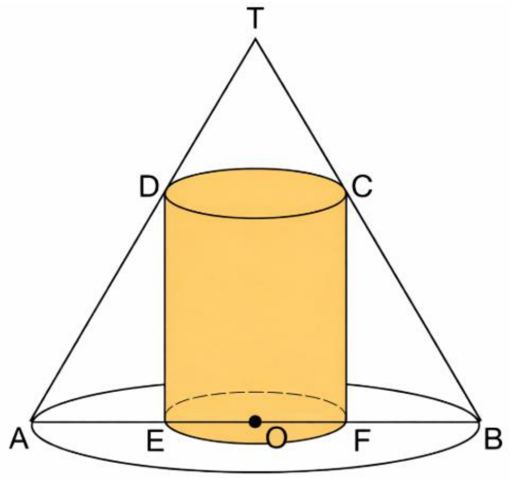
Анвар поместил свою маленькую игрушку в форме конуса внутрь первой большой ёмкости. Затем Анвар положил шарообразную розовую игрушку поверх конусов. В результате игрушки были расположены так, что вершины двух конусов совпали в одной точке, а шар касается нижнего конуса в точке A и большого конуса в точке O:



Используя данные, найдите объём розового мяча Анвара.

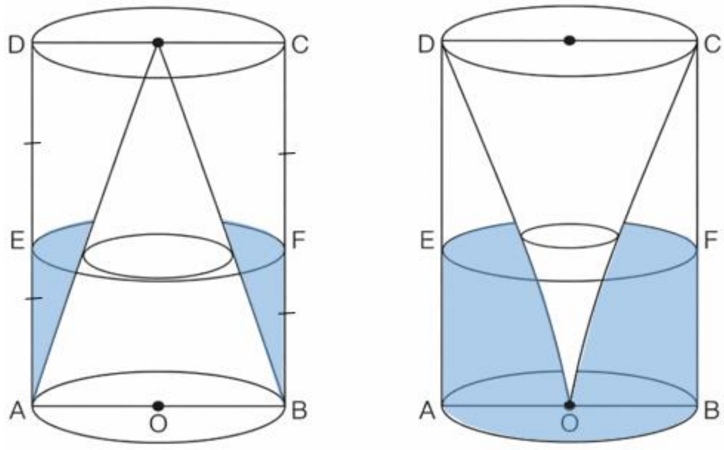
2. Тетя Мадина подарила своему маленькому сыну Бобуру две новые игрушки. Из них:
   - первая – пустая игрушечная ёмкость в форме конуса, площадь её боковой поверхности равна $1500\pi\ cm^2$.
   - вторая – игрушка в форме прямого цилиндра.

   Бобур расположил эти игрушки так, как показано на рисунке (цилиндр расположен внутри ёмкости вертикально, опираясь на основание, точки D и C — точки касания):



   Найдите объем игрушки в форме цилиндра, если $AE = EF = FB = 20\ cm.$

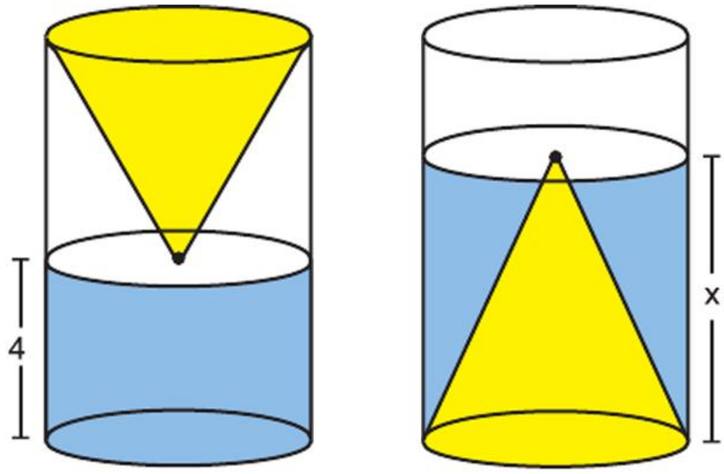
3. Али любит проводить эксперименты. Он взял два одинаковых прозрачных сосуда в форме цилиндра одинакового размера. В каждый сосуд он поместил по два одинаковых предмета в форме конуса, но в разном положении, и заполнил сосуды водой до половины высоты цилиндра (см. рисунок).



   Али заметил, что расположение конусов влияет на объём воды. Найдите, сколько воды было использовано для заполнения второго сосуда до половины цилиндра, если в первом сосуде объём налитой воды равен $20\ cm^3$.

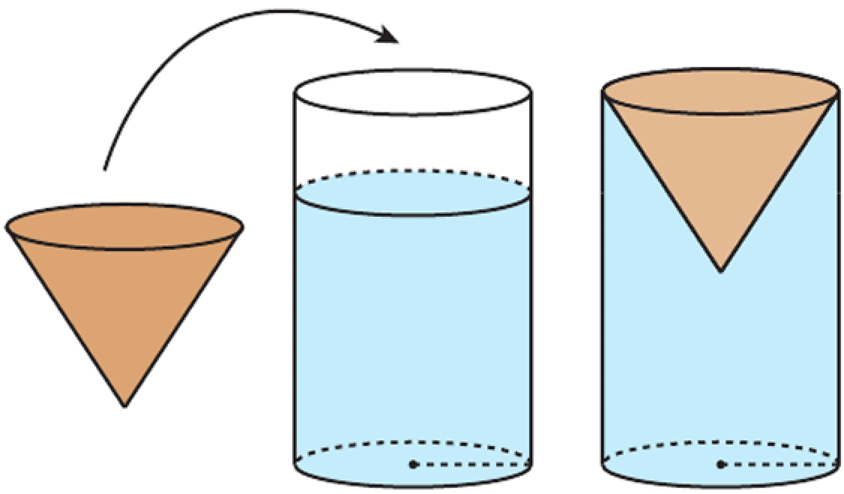
4. Сардор любит проводить эксперименты. Он взял прозрачный сосуд цилиндрической формы и поместил в него конус, радиус основания которого равен радиусу основания цилиндра. Сначала конус был размещён вершиной

вниз. После этого в цилиндр налили воду до вершины конуса, и оказалось, что уровень воды равен 4 cm. Затем конус перевернули и снова поместили вершиной вверх. При этом конус полый, то есть внутри него воды нет.



Найдите новую высоту уровня воды в цилиндре после изменения положения конуса.

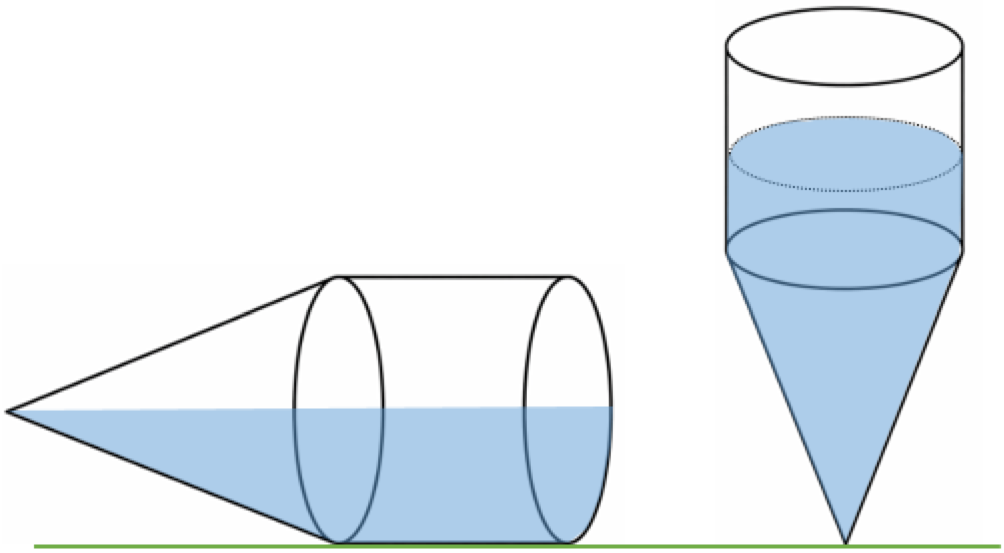
5. На рисунке показаны конус высотой 6 cm и прямой цилиндр, заполненный водой до высоты 10 cm. Когда конус помещают внутрь цилиндра (вершиной вниз), количество воды в цилиндре не изменяется, изменяется только уровень воды, и он становится равным высоте цилиндра.



Используя данные, найдите высоту цилиндра.

6. На рисунке изображён закрытый сосуд, состоящий из прямого цилиндра и конуса с одинаковыми радиусами и равными высотами, в двух положениях:

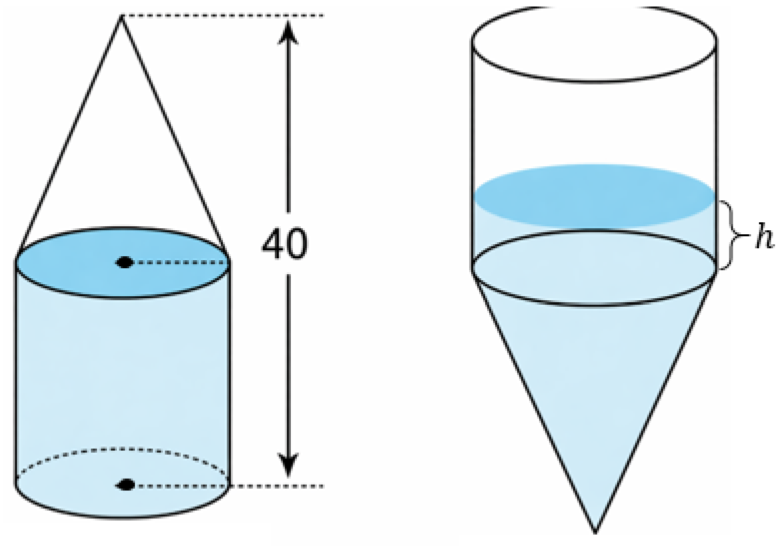
- в 1-ом положении сосуд расположен горизонтально и заполнен водой до вершины конуса (то есть до половины сосуда).
- во 2-ом положении сосуд расположен вертикально (основания конуса и цилиндра параллельны земле), при этом общий объём воды не изменяется.



1 положение 2 положение

Используя данные условия, определите, чему равно отношение объёма воды, оставшейся в цилиндре во 2-ом положении, к общему объёму воды.

7. На рисунке изображён закрытый сосуд, состоящий из прямого цилиндра и конуса одинакового радиуса, в двух положениях:
   - в 1-ом положении цилиндрическая часть этого сосуда заполнена водой;
   - во 2-ом положении сосуд перевёрнут, и часть воды перелилась в конус, но общий объём воды в сосуде не изменяется;
   - общая высота сосуда равна 40 cm;
   - высота цилиндрической части сосуда на 2 cm меньше высоты конической части.



1 положение 2 положение

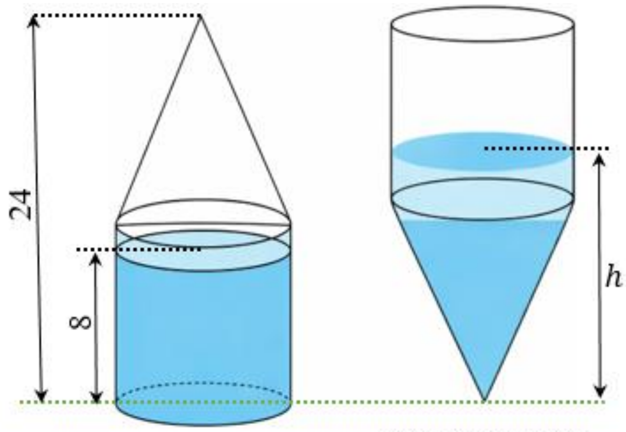
Найдите высоту (h) уровня воды, оставшейся в цилиндре, после изменения положения сосуда.

8. Ниже изображён закрытый сосуд, состоящий из прямого цилиндра и конуса одинакового радиуса, в двух положениях:

• в 1-ом положении цилиндрическая часть этого сосуда заполнена водой до высоты 8 cm;

• во 2-ом положении сосуд перевёрнут, и часть воды перелилась в конус, но общий объём воды в сосуде не изменяется;

• общая высота сосуда равна 24 cm.



1 положение 2 положение

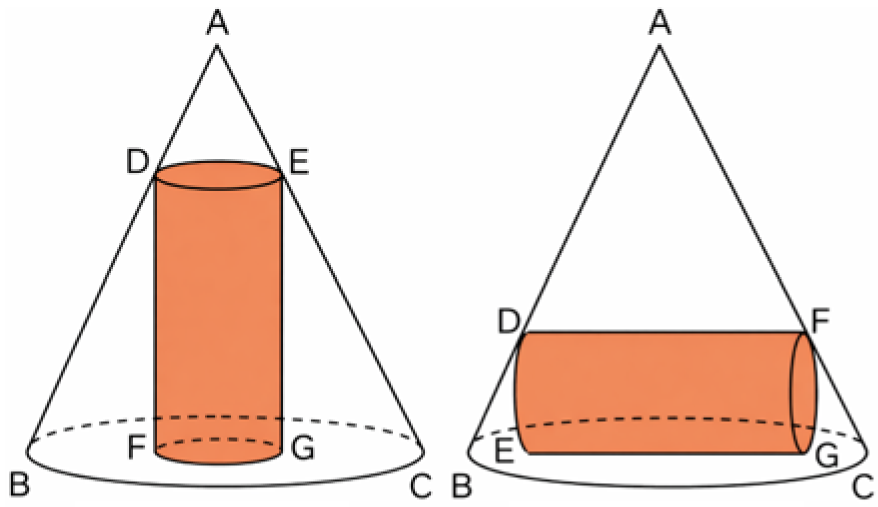
Найдите новую высоту уровня воды в сосуде (h), после изменения положения сосуда.

9. На рисунке изображены положения прямого кругового цилиндра радиусом 1 cm и высотой 6 cm, помещённого внутрь прямого кругового конуса.

• в 1-ом положении цилиндр расположен внутри конуса вертикально.

• На 2- ом положении цилиндр расположен внутри конуса горизонтально.

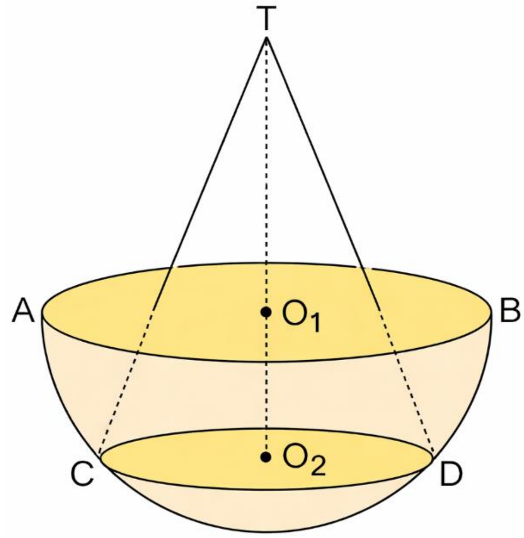
В обоих случаях точки D, E, F и G являются точками касания цилиндра и конуса.



1 положение 2 положение

Используя данные, найдите объем конуса.

10. На рисунке изображена полусфера с центром O_1 и радиусом 6 cm. Внутри этой полусферы размещён конус, центр основания которого – точка O_2, причем $O_1O_2 = 3\ cm$ и точка O_1 лежит на оси конуса.



Найдите длину отрезка TO_1, если объёмы полусферы и конуса равны.