

Олимпиадные задания МАТЕМАТИКА 11

1-часть. Каждое задание оценивается 0,9 баллом.

- Сколько существует целых положительных чисел, меньших 101, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7? A) 45 B) 46 C) 44 D) 43
- Рыбу разрезали на пять кусков в отношении по весу 14:12:11:8:15, причем пятый кусок весил 1,51 кг. Сколько весила вся рыба? A) 6,04 кг B) 6,72 кг C) 5,48 кг D) 5,64 кг
- Сколько существует двузначных чисел, первая цифра которых больше второй?
A) 24 B) 45 C) 36 D) 50
- Упростите: $\frac{1}{a^2-ac-ab+bc} + \frac{1}{b^2-ab-bc+ac} - \frac{1}{c^2-ac-bc+ab}$
A) 0 B) $\frac{2}{b^2-ab-bc+ac}$ C) $\frac{2}{ac-a^2+ab-bc}$ D) $\frac{2}{bc-c^2-ab+ac}$
- Сколько существует делителей числа 202100? A) 16 B) 27 C) 18 D) 36
- Вычислите: $1 + \frac{2}{2021} + \frac{3}{2021^2} + \frac{4}{2021^3} + \dots$ A) $\frac{2021}{2020}$ B) $\left(\frac{2021}{2020}\right)^2$ C) $\frac{2020}{2021}$ D) $\left(\frac{2020}{2021}\right)^2$
- На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята такая точка D , что $CD = 24$ и биссектриса CL ($L \in AB$) перпендикулярна прямой DL . Найдите AL .
A) 6 B) 12 C) 4 D) 8
- $\frac{1}{2!9!} + \frac{1}{3!8!} + \frac{1}{4!7!} + \frac{1}{5!6!} = \frac{n}{10!}$, Найдите n (здесь, $a! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot a$). A) 100 B) 92 C) 98 D) 96
- Упростите: $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{ab}+b+b\sqrt{b})^2(1-b\sqrt{b})^2}{\sqrt[4]{a-1}(b+b^{-1}-2)(1+b+\sqrt{b})^2} - \sqrt[4]{a} \cdot b^3 - b\sqrt[4]{a}(a+2\sqrt{ab^2})$
A) 0 B) $\sqrt[4]{a}(ab+a)$ C) $\sqrt[4]{a}(b^2-ab)$ D) $\sqrt[4]{a}(b^2+ab)$
- Сколько целые решений имеет неравенства: $\frac{|x^2-1|+x+1}{x^2-2x} \leq 0$
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

2-часть. Каждое задание оценивается 1,5 баллом

- Если $x^2 + 5y^2 + 4xy + 2y + 1 = 0$, то найдите $x + y$. A) 0 B) 1 C) -1 D) 2
- Упростите: $\frac{\cos^4 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}$
A) $tg^2 \alpha + tg^2 \beta$ B) $tg^2 \alpha - tg^2 \beta$ C) 1 D) -1
- Сколько корней имеет уравнение $x \cdot |x+1| = a$ при $a > 1$?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4
- Сколько целые решений имеет неравенства: $\log_3 x \leq \frac{2}{\log_3 x - 1}$. A) 4 B) 5 C) 6 D) 7
- $x^3 + mx + n$ многочлен делиться на $x^2 + 3x + 10$. Найдите $m + n$.
A) 30 B) -30 C) 29 D) -29
- Вычислите: $\sin^4 \frac{5\pi}{24} + \sin^4 \frac{7\pi}{24}$. A) $\frac{3-\sqrt{3}}{16}$ B) $\frac{1+\sqrt{3}}{8}$ C) $\frac{6-\sqrt{3}}{8}$ D) $\frac{2+\sqrt{3}}{16}$

**Олимпиадные задания
МАТЕМАТИКА 11**

17. Если $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10 \cdot 11 = \overline{x99y68z0}$, то найдите сумму $4x + 3y + 2z$.
(Здесь, x, y, z - цифры) А) 11 В) 12 С) 15 D) 16
18. Если $x^2 + x = 5$, то найдите значение $96x + x^6$ А) 210 В) 295 С) 205 D) 280
19. В треугольнике ABC: $\cos(2C - 1,5B) + \sin(A + C - 0,5B) = 2$ и $AC = 2\sqrt{3}$. Найдите радиус описанной окружности около треугольника ABC. А) $2\sqrt{3}$ В) $2\sqrt{2}$ С) 2 D) 1
20. В равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на основание и на боковую сторону, равны 6 и 4 соответственно. Найдите периметр треугольника.
А) $12\sqrt{2}$ В) $18\sqrt{2}$ С) $10\sqrt{7}$ D) $8\sqrt{7}$

3-часть. Каждое задание оценивается 2,6 баллом

21. Решите уравнение: $|x - 1| + |x - 3| + \left(x - \frac{\pi^2}{4}\right)^2 = 2$
22. Найдите $\sqrt{24} \cdot \left|\cos \frac{\alpha}{2}\right|$, если известно, что $6 \sin^2 \alpha \geq 4 + \cos \alpha$ и $\cos 2\alpha \geq -\frac{1}{9}$.
23. Расстояние между серединами сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ равно расстоянию между серединами его диагоналей. Найти угол, образуемый прямыми BC и AD при их пересечении.
24. Решить уравнение $\log_4 \left(\frac{65x^2 - 390x + 649}{x^2 - 6x + 10} \right) = 12x - 2x^2 - 15$
25. При каких значениях a корни уравнения $x^2 - (3a + 1)x + (2a^2 + 4a - 6) = 0$ меньше -1 ?
26. Найти сумму всех несократимых дробей со знаменателем 3, содержащихся между целыми числами 5 и 100.
27. Длины медиан треугольника равны $2\sqrt{5}$, 8 и $2\sqrt{11}$. Найдите угол между двумя меньшими медианами.
28. a, b -действительные числа, удовлетворяют равенству $(3a - 2b - 6)^2 = a^2 - b^2 - 9$, то найдите $2a - b$
29. В выпуклом четырёхугольнике ABCD: $AD = DC$, $\angle ADB = 50^\circ$, $\angle BDC = 20^\circ$ и $\angle ABC = 145^\circ$. Найдите $\angle BCA$.
30. Вычислите: $(\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ) \operatorname{tg} 60^\circ$